

Ruprecht-Karls-Universität
Heidelberg

SKALENANALYSE UND APPROXIMATION VON PROZESSEN AUF NETZWERKEN

Thomas Neusius

Diplomarbeit im Fach Physik
Interdisziplinäres Zentrum für wissenschaftliches Rechnen, Heidelberg
Betreuer: Prof. Dr. Willi Jäger & Prof. Dr. Heinz Horner

Fakultät für Physik und Astronomie

Ruprecht-Karls-Universität Heidelberg

Diplomarbeit im Studiengang Physik

vorgelegt von

Thomas Neusius

aus Neuwied

2004

SKALENANALYSE UND APPROXIMATION VON PROZESSEN AUF NETZWERKEN

Die Diplomarbeit wurde von Thomas Neusius ausgeführt am
Interdisziplinären Zentrum für wissenschaftliches Rechnen, Heidelberg
unter der Betreuung von
Prof. Dr. Willi Jäger & Prof. Dr. Heinz Horner
Dezember 2004

Interdisziplinäres Zentrum für wissenschaftliches Rechnen
Im Neuenheimer Feld 368
69121 Heidelberg

Satz: L^AT_EX2_ε

©2005, Heidelberg

Kurzzusammenfassung

In der folgenden Arbeit untersuchen wir eine Variante des Small-World-Modells, das von Watts und Strogatz entwickelt wurde. Nach einem Überblick über die aktuelle Diskussion zu Netzwerktypen stellen wir eine Näherung für den Minimalabstand auf Small-World-Graphen auf ein- und zweidimensionalen Grundgittern vor, vergleichen sie mit numerischen Ergebnissen und erweitern sie in einem Kontinuumslimit. Wir diskutieren das SI-Modell und formulieren einen Ansatz zu seiner mathematischen Beschreibung auf Small-World-Graphen. Ein SIRS-Modell wird vorgestellt und die Parameter, unter denen es zu selbstausgelöster Aktivität kommt, werden aus Simulationen bestimmt. Wir versuchen, diese Ergebnisse zu verstehen.

Abstract

In the following work we study a variant of small-world-network models according to Watts and Strogatz. After an overview to the recently discussed network models we present an approximation for the distribution of minimal distances of small-world models based on one- and two-dimensional lattices, compare it to numerical results and extend it to a continuous description. We discuss the SI-model and give an approach to a mathematical description on small-world graphs. A SIRS-model is presented, the parameters leading to self-sustained activity are numerically examined and we try to understand these results.

Vorwort

Im vergangenen Jahr habe ich mich in die aktuelle Diskussion zu Netzwerkmodellen eingearbeitet. Das sehr aktuelle Thema hat vielfältige Bezüge zu ganz verschiedenen Phänomenen, von denen uns nicht wenige im Alltag begegnen. Gerade die Vielfalt der möglichen Anwendungen hat mich immer wieder an diesem Gebiet fasziniert.

Ich habe versucht, in der vorliegenden Arbeit einen Überblick über dieses spannende Feld zu geben. An einigen Stellen konnte ich auch eigene Ideen und Ansätze zu einer Verbesserung oder Erweiterung bisheriger Ergebnisse einbringen. Die Abschnitte, die meine eigenen Resultate enthalten, sind durch einen Stern * gekennzeichnet.

Herzlich möchte ich allen danken, die mich beim Erstellen dieser Arbeit unterstützt haben. In erster Linie waren dies meine Betreuer Prof. Dr. Willi Jäger und Prof. Dr. Heinz Horner. Weiterhin danke ich Prof. Dr. Andreas Draguhn, Dr. Rainer Friedrich und Franziska Matthäus für Hinweise auf aktuelle Artikel mit Bezug zu meiner Arbeit.

Heidelberg, am 30. Januar 2005

Thomas Neusius

Inhaltsverzeichnis

1	Einführung	1
2	Begriffe	4
3	Reale Netzwerke	7
4	Strukturen und Topologie	12
4.1	Reguläre Gitter	12
4.2	Zufallsgraphen	13
4.3	Small-World-Graphen	17
4.3.1	Der Cliquenkoeffizient	20
4.3.2	Die Verteilung der Verknüpfungsgrade	21
4.3.3	Exakt lösbares Modell	23
4.3.4	Skalenverhalten und Phasenübergang	26
4.3.5	Weitere Eigenschaften von Small-World-Graphen	29
4.4	Skalenfreie Graphen	30
4.5	Hierarchische Graphen	33
4.6	Räumliche Graphen	34
4.7	Exponentielle Zufallsgraphen: Ein verallgemeinernder Ansatz	36
5	Small-World-Modell: Verteilung der Minimalabstände	40
5.1	Durchführung des Kontinuumslimes	40
5.2	Eindimensionales Problem	41
5.3	Mehrdimensionales Problem*	45
5.4	Allgemeiner Skalenansatz*	54
5.5	Zusammenhang von Gitter- und Minimalabstand*	59
6	Dynamik: Epidemien, Perkolation und Aktivitätsmuster	64
6.1	Perkolation	64
6.1.1	Perkolation auf Zufallsgraphen	66
6.1.2	Perkolation auf Small-World-Graphen	69
6.2	Dynamische Modelle	72
7	Ausblick	83
7.1	Blick auf die Neurophysiologie	83
7.2	Abschlußdiskussion	85
	Literaturverzeichnis	85

1 Einführung

Netzwerke sind in aller Munde und in den letzten Jahren haben sich eine Reihe von Möglichkeiten ergeben, Netzwerke auf unterschiedlichste Probleme anzuwenden. Obwohl die Netzwerktheorie zu den neueren Feldern von Mathematik und Physik zählt, verbindet sich ihr Ursprung mit einem der größten Mathematiker aller Zeiten: Leonhard Euler (1707-1783). Während seines ersten Aufenthaltes in St. Petersburg löste er 1736 das Problem der sieben Königsberger Brücken über den Pregel und zum Kneiphof. Wesentlich dafür war die Formulierung der Aufgabe als topologische Fragestellung. Dies war die Geburtsstunde der Graphentheorie und eines der ersten Ergebnisse der Topologie; Euler sprach von *geometriam situs*, wobei er sich nach eigenen Angaben einer Wortschöpfung Leibniz' bediente, der bereits zuvor Versuche angestellt hatte, einen nicht-metrischen Kalkül zu entwickeln.¹

Der ungarische Mathematiker Paul Erdős (1913-96) entwickelte 1959-68 zusammen mit Alfréd Rényi (1921-1970) die Idee der Zufallsgraphen.² Neben ihnen trugen in den folgenden Jahren auch andere Mathematiker wichtige Ergebnisse zum Feld der Zufallsgraphen bei. Außer seinen eigenen Ergebnissen findet sich bei BOLLOBÁS (1998, 2001) auch eine Zusammenfassung der Graphentheorie.

1967 stellte der Psychologe Stanley Milgram (1933-1984) einen Test der These, daß sich alle US-Amerikaner „über sechs Ecken“ kennen, vor: Er sandte 60 Briefe zu Anfangspersonen in Wichita, Kansas mit dem Auftrag, diese einer Zielperson in Cambridge, Massachusetts zukommen zu lassen, welche mit Namen, ungefährem Wohnort und Beruf beschrieben war. Allerdings gab es die Einschränkung, den Brief nur an Personen weiterzugeben, die man persönlich (first name basis) kannte. Auf dem Brief sollte jede Station vermerkt werden (MILGRAM 1967).

Milgrams Ergebnis war, daß die Briefe, die die Zielperson erreichten, im Mittel über fünf Stationen gelaufen waren. Dies testet allerdings neben der Existenz solcher kurzer Verbindungen auch die Möglichkeit, solche ohne Kenntnis des Gesamtnetzwerkes aufzufinden, weshalb man vermuten könnte, daß die tatsächlich kürzeste Verbindung eher kürzer als fünf ist. Andererseits sind nur drei Briefe angekommen. Da es wahrscheinlicher ist, daß ein Brief auf einem Weg mit vielen Stationen verloren geht, könnte dies den Mittelwert

¹„[...] primus mentionem fecit *Leibnitzius*, quam *Geometriam situs* vocavit“, (EULER 1736, 128). Der Begriff *Topologie* geht auf Johann Benedikt Listing zurück, der ihn 1847 erstmals verwendete. Siehe www.gis-tutor.de/theorie/grundlag/topologi/topologie.htm

²Einen Überblick über die Entwicklung und eine Auflistung der entsprechenden Originalarbeiten findet sich bei KAROŃSKI und RUCIŃSKI (1997).

künstlich abgesenkt haben. In nachfolgenden Experimenten konnte die Rate der ins Ziel kommenden Briefe von 5% auf bis zu 97% gesteigert werden; allerdings scheint sie empfindlich von den Rahmenbedingungen abzuhängen.³

In jedem Fall ist es erstaunlich, daß – bei etwa 200 Millionen US-Amerikanern im Jahre 1967 – durchschnittliche „Laufzeiten“ im einstelligen Bereich gefunden wurden. Das Prinzip der *Trennung über sechs Grade* (six degrees of separation) ist der vielleicht bemerkenswerteste Charakterzug der sogenannten *small-world* – ebenfalls ein von Milgram geprägter Begriff – und hat die Phantasie von Mathematikern und Physikern angeregt.

Inhalt der vorliegenden Arbeit

Die folgende Arbeit stellt Netzwerke und dynamische Prozesse darauf vor.

In Kapitel 2 werden Grundbegriffe für die Beschreibung von Netzwerken definiert. Anschließend gibt Kapitel 3 einen Überblick über reale Netzwerke und zeigt, welche strukturellen Eigenschaften sie aufweisen.

In Kapitel 4 werden die derzeit meistdiskutierten Netzwerkmodelle besprochen. Im Mittelpunkt wird das Small-World-Modell stehen, wie es von WATTS und STROGATZ (1998) entwickelt wurde. Um dieses Modell und seine Bedeutung für die Netzwerktheorie besser einordnen zu können, werden auch Zufallsgraphen nach Erdős und Rényi und skalenfreie Graphen vorgestellt. Einige aktuelle Ansätze, die verschiedene zusätzliche Aspekte realer Netzwerke erfassen, werden ebenfalls erläutert. Detailliert werden die bisherigen Versuche dargestellt, die Verteilung der minimalen Abstände in Small-World-Graphen zu berechnen.

In Kapitel 5 wird vor allem der Kontinuumsansatz von NEWMAN et al. (2000) nachvollzogen, der eine approximative Lösung der Verteilung der Minimalabstände (mittels Molekularfeldnäherung) im eindimensionalen Small-World-Graphen liefert (Abs. 5.2). Danach wird ein neuer Ansatz zur Berechnung dieser Verteilung vorgestellt, der nicht auf den eindimensionalen Fall beschränkt ist (Abs. 5.3). Er liefert ein Iterationsverfahren, dessen Ergebnisse mit Simulationen für den ein- und zweidimensionalen Small-World-Graphen verglichen werden. Diese Iterationsgleichungen befinden sich in sehr guter Übereinstimmung mit den numerischen Daten für einen großen Parameterbereich. Die Iterationsgleichungen veranlassen zu der Annahme, daß

³Über die richtige Interpretation von Milgrams Ergebnissen gibt es bis heute eine angeregte Diskussion.

http://en.wikipedia.org/wiki/Small_world_experiment

<http://cms.psychologytoday.com/articles/pto-20020301-000038.html>

www.uaf.edu/nothern/big_world.html

(WATTS 2003, 18f).

der Verlauf der gesuchten Verteilung bis auf eine Umskalierung durch die Zahl der Fernverbindungen bestimmt ist, was sich in numerischen Untersuchungen bestätigt. In der Konsequenz kann ein Kontinuumslimit durchgeführt werden, wenn die Zahl der Fernverbindungen konstant gehalten wird. Die Verteilung der Minimalabstände im Kontinuumslimit wird für das ein-dimensionale Small-World-Modell mit numerischen Ergebnissen und mit der Molekularfeldnäherung von NEWMAN et al. (2000) verglichen. Es zeigt sich, daß die beiden Näherungen den selben Einschränkungen unterliegen d. h. den selben Gültigkeitsbereich besitzen, daß aber das hier vorgestellte Vorgehen den Verlauf der Verteilung besser beschreibt. In zwei Dimensionen wurde eine gute Übereinstimmung der Näherung mit den numerischen Daten für den gesamten Parameterbereich gefunden.

Das Skalenverhalten wurde zudem auch für den Fall großer Zahlen von Fernverbindungen untersucht.

Abschnitt 5.5 beschäftigt sich mit der Frage, wie die Wahrscheinlichkeit, zwischen zwei Knoten einen bestimmten Minimalabstand zu finden, mit dem Gitterabstand zusammenhängt. Es wird gezeigt, daß im Small-World-Netzwerk beliebiger Dimension neben der Kenntnis der Verteilung der Minimalabstände keine weiteren Informationen notwendig sind, um den gesuchten Zusammenhang zu berechnen.

Dynamische Prozesse stehen im Mittelpunkt des 6. Kapitels. Neben Perkolationsphänomenen kommen verschiedene Modelle für die Ausbreitung von Krankheiten und Epidemien bzw. für neuronale Aktivität zur Sprache. Das SI-Modell wird im ein- und zweidimensionalen Fall des Small-World-Graphen besprochen und Ansätze zu seiner Lösung werden vorgeschlagen. Aufbauend auf dem SIRS-Modell wird ein vereinfachtes Modell neuronaler Aktivität vorgestellt. Es wird gezeigt, daß dieses eine Phase selbstausgelöster Aktivität besitzt, wie sie bei ROXIN et al. (2003) diskutiert wurde. Die Grenzen dieser Phase werden besprochen und Ansätze zu ihrer mathematischen Beschreibung dargestellt.

Im abschließenden Kapitel 7 soll ein kurzer Blick auf die bisherigen Ergebnisse der Neurophysiologie geworfen werden, um zu sehen, welche Perspektiven sich auf der Grundlage der besprochenen Modelle ergeben, solche Ergebnisse zu verstehen.

2 Begriffe

Graphen bestehen aus Knoten (ENGL. nodes oder vertices) und Verbindungen bzw. Kanten (ENGL. links, edges oder arcs). Folgende Definition folgt WATTS (2003).

Definition 1 *Ein ungerichteter Graph Γ bestehe aus einer nichtleeren Menge M , deren Elemente Knoten genannt werden, und einer ungeordneten Liste von Paaren dieser Knoten L . Ein solches Paar wird Verbindung oder Kante genannt. Man schreibt für die Knotenmenge $K(\Gamma) = M$ und die Verbindungsmenge $V(\Gamma) = L$*

Wenn nichts anderes gesagt wird, ist im folgenden immer von *ungerichteten Graphen* die Rede.

Obige Definition bedeutet, man hat es mit einer diskreten Struktur zu tun; dies bleibt selbst dann der Fall, wenn man nicht nur Verbindungen von einheitlicher Länge und Stärke zuläßt, sondern auch verschieden stark ausgeprägte oder gerichtete Verbindungen betrachtet. Dies deutet bereits auf eine der Schwierigkeiten hin, die beim Versuch eines Kontinuumslimes auftreten werden: Im Kontinuumslimes wird die diskrete Struktur des Graphen verloren gehen und damit eine Reihe seiner wesentlichen Charakteristika. Solch ein Grenzübergang ist deswegen nur möglich, wenn ebendiese Eigenschaften nicht von Interesse für die Fragestellung sind.

Man kann nun versuchen, den Graphen zu charakterisieren. Seien beispielsweise zwei Knoten über die Verbindungen miteinander verbunden, so kann gefragt werden, wie viele Verbindungen dazu mindestens abgelaufen werden müssen.

Definition 2 *Sei Γ ein Graph. Der Minimalabstand $d_{\Gamma}(i, j)$ (kurz $d(i, j)$) zweier Knoten $i, j \in K(\Gamma)$ sei die Mindestanzahl an Verbindungen, die man überqueren muß, um von i nach j zu laufen. Wenn i und j unverbunden sind, so werde $d_{\Gamma}(i, j) = \infty$ gesetzt.*

Mit dieser Definition ist $d(i, j)$ keine Metrik, da es den Wert unendlich annimmt. Dies ist vor allem deswegen problematisch, weil es so nicht möglich ist, sinnvoll das arithmetische Mittel über die $d(i, j)$ zu bilden.

Definition 3 *Ein Graph Γ heiÑe totalverbunden, falls $d(i, j) < \infty$ für alle $i, j \in K(\Gamma)$.*

Für totalverbundene ungerichtete Graphen ist $d(i, j)$ eine Metrik. Falls die Definition jedoch auf gerichtete Netzwerke angewendet wird, deren Verbindungen nur in einer Richtung durchlaufen werden dürfen, ist $d(i, j)$ asymmetrisch.

Hier wurden alle Verbindungen als gleichlang betrachtet. Es ist aber auch möglich, gewichtete Verbindungen zuzulassen. Näheres dazu findet sich bei NEWMAN (2004).

Eine globale Eigenschaft des Graphen ist das arithmetische Mittel⁴ aus $d(i, j)$ über alle Paare von Knoten, die als *charakteristische Weglänge* ℓ (ENGL. shortest-path length, chemical distance) bezeichnet wird.

Definition 4 *Es sei Γ ein Graph. Für $i \in K(\Gamma)$ ist die Nachbarschaft $\Phi(i)$ die Menge der Knoten, die mit i verbunden sind (ohne i selbst).*

Definition 5 *Enthalte $\Phi(i)$ genau k_i Elemente, und gebe es m_i Verbindungen unter den Elementen von $\Phi(i)$. So sei der Cliquenkoeffizient (ENGL. clustering coefficient, cliquishness) definiert als*

$$C_i := \frac{2m_i}{k_i(k_i - 1)}.$$

Er liegt immer zwischen 0 und 1. Sein Mittelwert über den gesamten Graphen beschreibt eine lokale Eigenschaft des Graphen, nämlich wie stark die Bildung von „Cliques“ ausgeprägt ist.

MARCHIORI und LATORA (2000) haben darauf hingewiesen, daß mit dem Begriff der *Verbindungslänge* („connectivity length“) eine Vereinheitlichung der lokalen Beschreibung durch den Cliquenkoeffizienten und der globalen Beschreibung durch die charakteristische Weglänge möglich sei, was zu einer harmonischen Beschreibung von Netzwerken führe.

Eine weitere Eigenschaft einzelner Knoten ist der Verknüpfungsgrad.

Definition 6 *Sei $i \in K(\Gamma)$ und habe k_i Verbindungen zu anderen Knoten, so wird k_i Verknüpfungsgrad (ENGL. node degree) des Knoten i genannt.*

Gleichzeitig gibt der Verknüpfungsgrad auch an, aus wie vielen Knoten die Nachbarschaft $\Phi(i)$ besteht. Oft ist auch von der Verteilung des Verknüpfungsgrades im Graphen die Rede. Im Fall gerichteter Graphen muß zudem noch zwischen dem Grad ein- und ausgehender Verbindungen unterschieden werden.

Definition 7 *Sei $\Gamma = \{M, L\}$ ein Graph. Der Graph $\gamma = \{m, l\}$ heiße Untergraph von Γ , falls $m \subset M$ und $l \subset L$.*

⁴Tatsächlich wird die charakteristische Weglänge etwas anders definiert, da es numerisch aufwendig ist, das arithmetische Mittel zu berechnen. Siehe dazu (WATTS 2003, 27-30).

Prinzipiell genügt es zur Beschreibung eines Netzes, eine Liste der Knoten und Verbindungen zu erstellen. Eine Lokalisierung z. B. der Knoten muß nicht gegeben sein. In vielen Fällen ist der Graph jedoch in eine niedrigdimensionale Geometrie (1D, 2D oder 3D) eingebettet. Dann gibt es für zwei Knoten i und j neben dem Minimalabstand auch noch den *euklidischen Abstand* in der Einbettungsgeometrie.

3 Reale Netzwerke

Die folgenden Beispiele sollen einen Überblick über die geläufigsten Beispiele von realen Netzwerken geben. Weitere Zusammenfassungen finden sich in AMARAL und OTTINO (2004) und AMARAL et al. (2000) und besonders bei DOROGOVTSSEV und MENDES (2002) und ALBERT und BARABÁSI (2002). Aus diesen beiden Artikeln stammen auch folgende Beispiele.

Das Netzwerk wissenschaftlicher Zitate

Wenn man einen wissenschaftlichen Artikel oder ein Buch als Knoten betrachtet und die Verweise auf andere Veröffentlichungen als ausgehende Verbindungen ansieht, so erhält man einen gerichteten Graphen. Der Grad für ausgehende Verbindungen eines bestimmten Artikels ist zeitlich konstant (wenn man Neuauflagen etc. ausschließt), während der Grad eingehender Verbindungen zunimmt, jedoch vermutlich nach einer gewissen Zeit eine Sättigung erfahren wird.

Das Netzwerk der vom Institute of Scientific Information für den Zeitraum 1981-1997 erfaßten Veröffentlichungen und das von Physical Review D, Bände 11-50 zwischen 1975 und 1994 (24 296 Artikel) wurden untersucht. Jenes beinhaltet 783 339 Artikel, in denen 6 716 198 Verweise aufeinander enthalten sind; der meistzitierte Beitrag wurde in 8 904 Fällen erwähnt. Dieses verfügt über 351 872 Zitierungen. Die Verteilung des Grades eingehender Verbindungen wurde durch ein Potenzgesetz beschrieben $P(k_i) \propto k_i^{-3}$, wobei die Gesamtzahl der Artikel zu gering ist, um einen exakten Wert des Exponenten angeben zu können (DOROGOVTSSEV und MENDES 2002; REDNER 1998).

Es wurde zudem gezeigt, daß die Artikel besonders häufig zitiert werden, auf die bereits sehr häufig verwiesen wurde. Diese Form der *bevorzugten Verbindung* wird später noch eine große Bedeutung für die Modellierung solcher Graphen haben (Abs. 4.4).

Netzwerk der Zusammenarbeit

Ein sehr beliebtes Beispiel für Netzwerkstrukturen ist des Netzwerk von Schauspielern, die in einem gemeinsamen Film zu sehen waren. Bekannt wurde es durch das *Kevin Bacon-Spiel*. Dabei gibt es zwei Arten von Knoten (weswegen auch von einem *bipartiten Graphen* gesprochen wird): Die Filme und die Schauspieler. Jeder Schauspieler wird mit allen Filmen verbunden,

bei denen er mitgewirkt hat. Verbindungen sind also nur zwischen den verschiedenen Knotentypen möglich.

Ähnliche Graphen kann man zum Beispiel aus wissenschaftlichen Artikeln und den beteiligten Autoren bilden (hier sind nicht mehr die Zitate die Verbindungen).

Bipartite Graphen können auf Graphen mit nur einer Sorte von Knoten projiziert werden (vgl. Abb. 3.1).

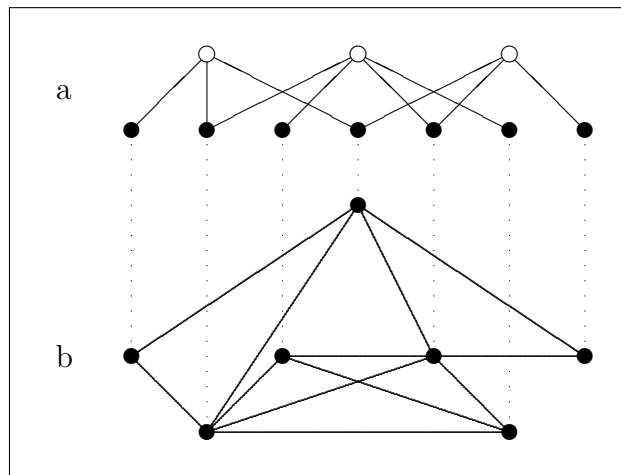


Abbildung 3.1: Bipartiter Graph (a) und Projektion (b)

In der Projektion des Graphen der Filmzusammenarbeit wurden 225 226 Schauspieler betrachtet, der durchschnittliche Grad ist $\langle k \rangle = 61$, die charakteristische Weglänge ist $\ell = 3,65$, was nahe am Wert des Zufallsgraphen mit gleichem $\langle k \rangle$ und N ist ($\ell_{rand} = 3,00$). Der Cliquenkoeffizient ist mit $C = 0,79$ erheblich größer als der des vergleichbaren Zufallsgraphen $C_{rand} = 0,00027$.

Internet

Das Internet ist (zusammen mit dem WWW) das wohl beliebteste Beispiel realer Netzwerkstrukturen. Die Knoten des Internets sind die Computer der Nutzer (Host), der Netzanbieter (Server) und der sogenannten *Router*, die für den Austausch der Daten sorgen. Es kann auf der Ebene der Router betrachtet werden oder auf der Ebene der *Domains*, die mehrere Hosts zu

einem einzigen Knoten zusammenfassen. Es wurden vielfältige Untersuchungen durchgeführt und regelmäßig erscheinen neue, da sich das Internet mit großer Geschwindigkeit entwickelt (VÁZQUEZ et al. 2002). Es zeigte sich, daß das Internet ebenfalls eine Gradverteilung $P(k) \propto k^{-\gamma}$ mit γ zwischen 2,2 und 2,5 aufweist. Der durchschnittliche Grad liegt bei etwa 4, der Cliquenkoeffizient bei 0,18 bis 0,3 ($C_{rand} = 0,001$). Die charakteristische Weglänge $\ell = 3,7$ liegt im Bereich des entsprechenden Zufallsgraphen⁵ $\ell_{rand} = 2,99$.

Das Internet ist in einer weiteren Hinsicht von besonderem Interesse: Es handelt sich um einen Graphen, der physikalisch existent ist und damit eine natürliche Einbettungsgeometrie hat, im Gegensatz zu den Zusammenarbeitsgraphen. Es wurde von GASTNER und NEWMAN (2004b) darauf hingewiesen, daß dies direkten Einfluß auf die Netzwerkarchitektur hat (vgl. 4.6).

World Wide Web

Das WWW ist das größte Netz, zu dem umfassende Daten bezüglich der Struktur vorliegen. Die Knoten sind die Seiten (ENGL. homepage), während die gerichteten Verbindungen aus Verweisen (ENGL. link) auf andere Seiten bestehen. Besonderes Interesse ruft das WWW hervor, weil es keiner vorgegebenen Architektur folgt, sondern stets von verschiedenen Individuen unabhängig erweitert wird. Trotz dieses dezentralen Wachstums zeigte sich, daß auch das WWW einigen bekannten Strukturmerkmalen folgt.

Generell kann es eingeteilt werden in vier Teile: Erstens einen Kern, der die meistbesuchten Seiten enthält. Dieser Kern ist totalverbunden. Zweitens die Teile des WWW, die zwar vom Kern aus erreicht werden können, aber keinen „Rückweg“ zulassen; drittens die Teile, die nicht vom Kern erreicht werden können, aber einen Zugang zum Kern haben und viertens die Teile, die gänzlich isoliert sind vom Kern (KLEINBERG und LAWRENCE 2001).

Über mehrere Größenordnungen folgt die Verteilung der Verknüpfungsgrade einem Potenzgesetz mit Exponent $\gamma \approx 2,1$. Um den Cliquenkoeffizienten zu berechnen, muß man von der Richtung der Verbindungen absehen (oder die Definition modifizieren). Das Ergebnis liegt mit $C = 0,1078$ deutlich über dem Wert des zugehörigen Zufallsgraphen $C_{rand} = 0,00023$. Abschätzungen der charakteristischen Weglänge liegen im Bereich von $\ell \approx 20$ für 200 Millionen Seiten umfassende Stichproben.

⁵Wenn hier und im folgenden von dem *vergleichbaren Zufallsgraphen* gesprochen wird, so ist der Zufallsgraph (vgl. auch Def. 8) mit gleicher Knotenzahl und gleichem mittleren Verknüpfungsgrad gemeint.

Sexualkontakte

Die Untersuchung dieses Netzwerkes ist im Zusammenhang mit geschlechtlich übertragbaren Krankheiten besonders forciert worden. Es zeigte sich, daß auch hier die Verteilung der Grade einem Potenzgesetz gehorcht mit dem Exponenten $\gamma \approx 3,4$.

Metabolische Netzwerke

Solche Netzwerke sind ein Spezialfall von den Netzwerken chemischer Reaktionen. Dabei sind die Reaktionsteilnehmer die Knoten und werden verbunden, wenn sie an einer gemeinsamen Reaktion beteiligt sind. Dies kann auch gerichtet geschehen, indem die Verbindungen von den Edukten zu den Produkten zeigen. Ein Beispiel für ein solches metabolisches Netzwerk ist das Bakterium *Escherichia coli*, das aus 282 Knoten besteht und hier als ungerichtet betrachtet wird. Der durchschnittliche Grad beträgt $\langle k \rangle = 7$, die charakteristische Weglänge $\ell = 2,9$, der Cliquenkoeffizient $C = 0,3 \gg 7/282 = 0,025 = C_{rand}$.

Trotz der relativen Kleinheit solcher metabolischer Netzwerke geht man heute davon aus, daß ihre Gradverteilung Potenzverlauf besitzt (RAVASZ et al. 2002; VÁZQUEZ et al. 2004).

Zudem wurde festgestellt, daß in metabolischen Netzwerken auch der Cliquenkoeffizient einem Potenzgesetz genügt

$$C(k) \propto k^{-\delta}.$$

Neuronale Netzwerke

Die Topologie neuronaler Netze wurde bislang vor allem am Beispiel des Nematodenwurms *Caenorhabditis elegans* studiert, von dem ein vollständiger Plan vorliegt. Es verfügt über 282 Knoten (den Nervenzellen), die verbunden sind, falls ein synaptischer oder sonstiger Kontakt vorliegt. Der durchschnittliche Grad ist $\langle k \rangle = 14$, die Verteilung der Grade fällt exponentiell ab (AMARAL et al. 2000), die charakteristische Weglänge ist $\ell = 2,65$. Auch hier ist der Cliquenkoeffizient deutlich höher als im entsprechenden Zufallsgraphen $C = 0,26 \gg 0,05 = 14/282 = C_{rand}$.

Sonstige Netzwerke

Es gibt noch eine Reihe weiterer Beispiele von Netzwerken. So wurden als Beispiele sozialer Netzwerke die Kontakte von amerikanischen Mormonen und Hochschulabsolventen untersucht (AMARAL et al. 2000).

Besonderes Interesse, gerade nach dem großen Stromausfall an der amerikanischen Ostküste, hat auch das Stromnetzwerk hervorgerufen, das zudem ein wichtiges Beispiel für ein eingebettetes Netzwerk ist (RAVASZ und BARABÁSI 2003). Weitere eingebettete Netzwerke sind das Netzwerk der direkten Flugverbindungen und das Straßennetz (GASTNER und NEWMAN 2004b).

Desweiteren wurden Ernährungsketten als Netzwerke beschrieben, das Zusammenspiel von Proteinen, die Verwendung von Worten, sowie das Telefonnetzwerk.

4 Strukturen und Topologie

Im folgenden sollen, wenn es nicht ausdrücklich anders erwähnt wird, die Graphen keine gerichteten oder gewichteten Verbindungen besitzen. Es werden einige vieluntersuchte Modelle vorgestellt. Eine Zusammenfassung findet sich in NEWMAN (2000), STROGATZ (2001), DOROGOVITSEV und MENDES (2002), ALBERT und BARABÁSI (2002) und AMARAL und OTTINO (2004).

4.1 Reguläre Gitter

Ein extremes Beispiel eines Graphen ist ein reguläres Gitter. Solche Gitter sind zum einen als Grenzfall von Netzwerkarchitekturen von Bedeutung, andererseits werden einige Modelle ausgehend von Gittern konstruiert.

Bei Gitterstrukturen ist die Verbindung zu einer Einbettungsgeometrie besonders offensichtlich: Ausgehend von einer regelmäßigen Anordnung von Knoten in einem d -dimensionalen Raum werden dann nach festen, translationsinvarianten Regeln Verbindungen geknüpft. Im einfachsten Fall werden die Knoten mit den jeweils in den d Richtungen nächsten Nachbarn verbunden, so daß jeder Knoten $2d$ Verbindungen erhält. Oft werden aber auch Verbindungen mit den über-, überüber nächsten usw. bis zum l -ten Knoten geknüpft, wobei nur Verknüpfungen parallel zu den d Gitterachsen geknüpft werden (Abb. 4.1). Dann hat jeder Knoten im Gitter $2dl$ Verbindungen. Dieses Verknüpfungsschema entspricht dem üblichen Vorgehen in den Artikeln zu Small-World-Graphen (NEWMAN und WATTS 1999b).

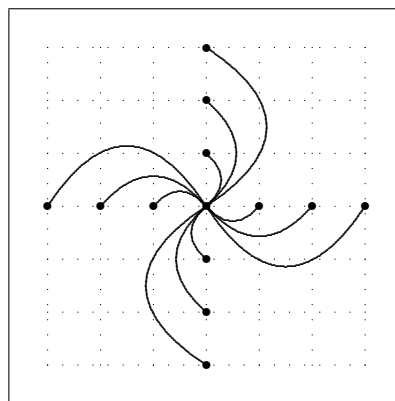


Abbildung 4.1: Verknüpfung eines Knotens in einem zweidimensionalen Gitter mit $l = 3$.

Die charakteristische Weglänge in einem Gitter wächst linear mit der

Größe des Systems. Der Cliquenkoeffizient beträgt beispielsweise im eindimensionalen Fall für $l \geq 2$

$$C = \frac{3(l-1)}{2(2l-1)}.$$

In jedem Fall ist er unabhängig von der Systemgröße L^d .

4.2 Zufallsgraphen

Klassische Zufallsgraphen

Klassische Zufallsgraphen werden auf zwei verschiedenen, aber äquivalenten Wegen eingeführt:

Definition 8 *Es sei $\mathcal{E}_{N,n}$ die Menge der Graphen mit n Verbindungen und N unterscheidbaren Knoten. Maximal können $N(N-1)/2$ Verbindungen gebildet werden. Also gibt es*

$$\binom{N(N-1)/2}{n}$$

Graphen mit N Knoten und n Verbindungen. Es werde zufällig ein Element $\Gamma_{N,n} \in \mathcal{E}_{N,n}$ ausgewählt, das Zufallsgraph heie.

Definition 9 *Seien N unterscheidbare Knoten vorgegeben und jede der möglichen $N(N-1)/2$ Verbindungen sei mit der Wahrscheinlichkeit ϕ realisiert. So heie der sich ergebende Graph Zufallsgraph $\Gamma_{N,\phi}$*

Der Graph wird dann im Mittel $\langle n \rangle = \phi N(N-1)/2$ Kanten besitzen. Dieses Modell wird als *Binomialmodell* bezeichnet und geht auf E. N. Gilbert zurück, während die erste Definition eines Zufallsgraphen von Erdős selbst stammt (KAROŃSKI und RUCIŃSKI 1997); die Äquivalenz der beiden Modelle wurde von BOLLOBÁS (2001) nachgewiesen. Die Wahrscheinlichkeit, auf diesem Weg einen speziellen Graphen $\Gamma_{N,n}$ mit N Knoten und n Verbindungen zu bekommen, ist

$$P(\Gamma_{N,n}) = \phi^n (1 - \phi)^{\frac{N(N-1)}{2} - n}.$$

Zufallsgraphen sind ein Beispiel für Graphen, die keine vorgegebene Beziehung zu einer Einbettungsgeometrie besitzen. Natürlich ist es möglich, jedem Knoten eines Zufallsgraphen eine Position in einem beliebigen Raum zuzuordnen, der seinerseits eine Metrik besitzen kann. Dazu sind aber weitere

Annahmen nötig, die sich nicht aus der Konstruktion des Zufallsgraphen selbst ergeben.

Im Mittelpunkt des Interesses bei Zufallsgraphen steht der Grenzübergang $N \rightarrow \infty$.

Definition 10 Fast jeder Zufallsgraph $\Gamma \in \mathcal{E}_{N,\phi}$ mit $\phi(N)$ habe die Eigenschaft E , wenn die Wahrscheinlichkeit, daß ein Graph aus $\mathcal{E}_{N,\phi}$ die Eigenschaft E besitzt, für N gegen unendlich gegen 1 konvergiert.

Bereits Erdős und Rényi fanden heraus, daß viele Eigenschaften (z. B. die Eigenschaft, daß je zwei Knoten über einen Pfad von Verbindungen verbunden sind) von Graphen sehr plötzlich auftreten, daß es also in vielen Fällen eine kritische Wahrscheinlichkeit $\phi_c(N)$ gibt, die die Grenze des Bereichs angibt, in denen eine Eigenschaft bei fast jedem Graphen auftritt.

Definition 11 Gelte für die Wahrscheinlichkeit, die Eigenschaft E anzutreffen,

$$\lim_{N \rightarrow \infty} P_{\phi,N}(E) = \begin{cases} 0 & \text{wenn } \frac{\phi(N)}{\phi_c(N)} \rightarrow 0 \\ 1 & \text{wenn } \frac{\phi(N)}{\phi_c(N)} \rightarrow \infty \end{cases}$$

so heiße $\phi_c(N)$ kritische Wahrscheinlichkeit der Eigenschaft E .

ALBERT und BARABÁSI (2002) weisen darauf hin, daß es einen wesentlichen Unterschied zwischen dieser $\phi_c(N)$ und der aus der Perkolationstheorie bekannten kritischen Wahrscheinlichkeit gibt: Während in der Perkolationstheorie von einem festen N und fester endlicher Dimension ausgegangen wird, sind Zufallsgraphen per definitionem unendlichdimensional im Grenzfall $N \rightarrow \infty$, da die Zahl der möglichen Nachbarn in diesem Fall gegen unendlich geht. Der Grenzwert $\phi_c = \lim_{N \rightarrow \infty} \phi_c(N)$, den man in der Perkolationstheorie bildet, setzt die Existenz von ϕ_c voraus, die aus der Unabhängigkeit der Perkolationsschwelle von der Systemgröße folgt. In endlichdimensionalen Systemen ist dies meist der Fall (SCHWABL 2000, 341), nicht aber im Fall von Zufallsgraphen. Es wird sich zeigen, daß für bestimmte Eigenschaften $\phi_c(N \rightarrow 0) \rightarrow 0$. Zur Perkolationstheorie auf Netzwerken vgl. Abschnitt 6.1.

Eine der interessantesten Fragen in bezug auf Zufallsgraphen ist, bei welcher kritischen Wahrscheinlichkeit $\phi_c(N)$ fast alle Graphen totalverbunden sein werden bzw. bestimmte Untergraphen anzutreffen sein werden. Dazu werden einige Typen von Graphen eingeführt.

Definition 12 Ein Zykel l -ter Ordnung sei eine geschlossene Schleife mit l Kanten, so daß jeder Knoten exakt den Verknüpfungsgrad 2 besitze.

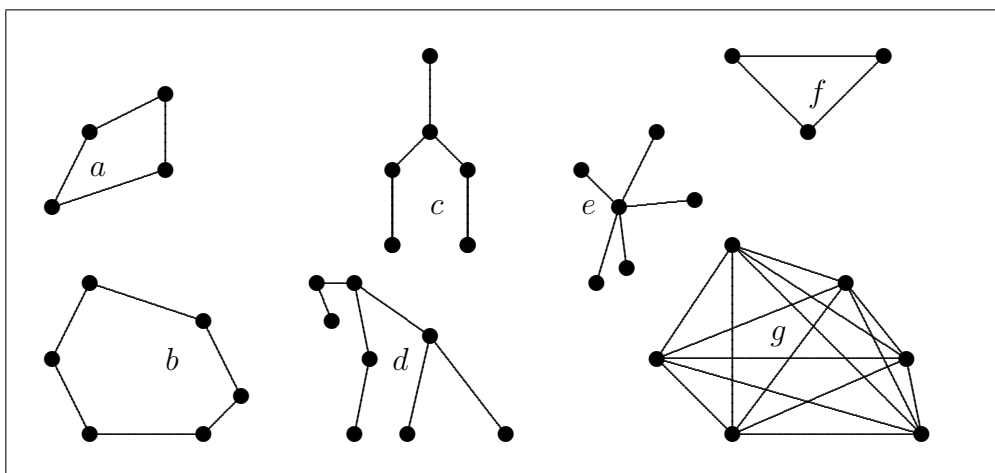


Abbildung 4.2: Graphentypen: Zykel der Ordnung drei (f), vier (a) und sechs (b), Bäume der Ordnung sechs (c, e) und acht (d) und totalverbundene Graphen der Ordnung drei (f) und sechs (g).

Ein Graph heie Baum l -ter Ordnung, wenn er l Knoten und $l-1$ Kanten enthält und totalverbunden ist. Ein solcher Graph hat den durchschnittlichen Grad $\langle k \rangle = 2 - 2/l$

Ein vollständiger Graph der Ordnung l sei ein Graph, der l Knoten und alle möglichen $l(l-1)/2$ Verbindungen enthalte.

Ab welchem $\phi_c(N)$ wird man in Γ einen oder mehrere Untergraphen eines bestimmten Typs finden? Und wie viele? Darauf hat Bollobs eine Antwort gegeben.

Satz 1 Die kritische Wahrscheinlichkeit in fast allen Graphen $\Gamma \in \mathcal{E}_{N,\phi}$ eine Zahl von r Untergraphen in Form von Bäumen l -ter Ordnung zu finden, ist

$$\phi_c(N) \propto N^{-l/(l-1)}.$$

Die kritische Wahrscheinlichkeit in fast allen Zufallsgraphen $\Gamma \in \mathcal{E}_{N,\phi}$ eine Zahl von r Untergraphen in Form von Zykeln zu finden, ist

$$\phi_c(N) \propto N^{-1}$$

und damit unabhängig davon, welcher Ordnung die Zykeln sind.

Die kritische Wahrscheinlichkeit in fast allen Graphen $\Gamma \in \mathcal{E}_{N,\phi}$ eine Zahl von r vollständige Untergraphen zu finden, ist

$$\phi_c(N) \propto N^{-2/(l-1)}.$$

Beweis: Es sei $\Gamma \in \mathcal{E}_{N,\phi}$ ein Zufallsgraph. Sei S ein weiterer (kleinerer) Graph mit L Knoten und l Kanten. Die L Knoten können aus den N Knoten auf N über L verschiedene Möglichkeiten ausgewählt werden und es gibt $L!/a$ Möglichkeiten, die Kanten einzufügen, wobei a die Mächtigkeit der Automorphiegruppe von S ist. Jede Kante wird mit der Wahrscheinlichkeit ϕ gebildet, so daß die Anzahl der Untergraphen des Typs S den Erwartungswert

$$E(X) = \binom{N}{L} \frac{L!}{a} \phi^l \approx \frac{N^L \phi^l}{a}$$

besitzt. Daraus ist ersichtlich, daß für $\phi = cN^{-\alpha}$ mit $\alpha > L/l$ der Erwartungswert $\lim_{N \rightarrow \infty} E(X) = 0$. Einen endlichen Wert $E(X) = \frac{c^l}{a}$ erhält man für

$$\phi = cN^{-L/l},$$

so daß man dann bei fast allen Graphen von c^l/a Untergraphen des Typs S ausgehen kann. Damit $E(X) = r$ ist, muß $c = (ar)^{1/l}$ gelten. Ein allgemeiner Beweis findet sich bei BOLLOBÁS (2001, 79-80). *qed.*

In einem Zufallsgraphen $\Gamma \in \mathcal{E}_{N,\phi}$ werde ein Knoten i betrachtet. Die Wahrscheinlichkeit, daß k bestimmte Kanten ihn mit anderen Knoten verbinden, ist ϕ^k , die, daß die übrigen möglichen Kanten nicht existieren, ist $(1 - \phi)^{N-1-k}$. Wenn es sich nicht um bestimmte sondern beliebige k Kanten handeln darf, kann noch permutiert werden, was $N - 1$ über k weitere Möglichkeiten ergibt. Also folgt der Grad k_i der Knoten in einem Zufallsgraphen der Binomialverteilung

$$P(k_i = k) = \binom{N-1}{k} \phi^k (1 - \phi)^{N-1-k}.$$

Der Erwartungswert der Zufallsvariablen X_k , die die Anzahl von Knoten mit Grad k im Graphen zählt, ist folglich

$$E(X_k) = NP(k_i = k) = N \binom{N-1}{k} \phi^k (1 - \phi)^{N-1-k} =: \lambda_k.$$

Die Verteilung der Verknüpfungsgrade ist nun die Wahrscheinlichkeit eine bestimmte Zahl r an Knoten mit Grad k zu finden $P(X_k = r)$. Diese nähert sich einer Poissonverteilung an.

Der mittlere Grad im Zufallsgraph $\Gamma \in \mathcal{E}_{N,\phi}$ ist $\langle k \rangle = \phi(N - 1)$ (bzw. für $\Gamma \in \mathcal{E}_{N,n}$ ist $\langle k \rangle = 2n/N$). Zufallsgraphen haben die Eigenschaft zu streuen, dies bedeutet: Bei einem mittleren Grad $\langle k \rangle$ kann man annehmen, in einem Abstand l von einem festen Punkt i ungefähr $\langle k \rangle^l$ Knoten zu finden,

solange l kleiner ist als die charakteristische Weglänge ℓ_{rand} . Daraus kann man schließen man schließen $\langle k \rangle^{\ell_{rand}} \approx N$, woraus für die charakteristische Weglänge im totalverbundenen Graphen folgt

$$\ell_{rand} \approx \frac{\ln N}{\ln \langle k \rangle}. \quad (4.1)$$

Man betrachte die Nachbarschaft eines Knoten i im Graphen $\Gamma \in \mathcal{E}_{N,\phi}$. Die Wahrscheinlichkeit, daß zwei bestimmte Knoten in der Nachbarschaft untereinander verbunden sind, ist genau ϕ . Damit ergibt sich der Cliquenkoeffizient zu

$$C_{rand} = \phi = \frac{\langle k \rangle}{N - 1}.$$

Die Ergebnisse für Zufallsgraphen bestehen darin, daß viele Eigenschaften sehr plötzlich auftreten. Weiterhin ist die charakteristische Weglänge klein gegen die Netzwerkgröße, bzw. wächst nur logarithmisch mit der Knotenzahl. Solche kurzen Weglängen werden in realen Netzwerken beobachtet (vgl. Abs. 3). Der Cliquenkoeffizient ist klein, was kein Charakterzug der meisten realen Netzwerke ist. Schließlich ist die Verteilung der Verknüpfungsgrade eine Poissonverteilung, was ebenfalls in vielen realen Netzwerken nicht wiedergefunden wird.

Verallgemeinerte Zufallsgraphen

Um die Abweichungen der Eigenschaften von Zufallsgraphen von realen Netzwerken zu minimieren, wurde eine Erweiterung des Modells vorgeschlagen: Die Graphen sollten einer vorgegebenen Gradverteilung folgen, ansonsten aber weiterhin völlig zufällig sein. Da, wie in Abschnitt 3 ausgeführt, viele Netzwerke eine Gradverteilung der Art $P(k) \propto k^{-\gamma}$ aufweisen, ist dies die üblicherweise untersuchte Verteilung. Siehe dazu Abschnitt 4.4. Die Ergebnisse in Abschnitt 6.1.1 beziehen sich auf Zufallsgraphen mit beliebiger Gradverteilung.

4.3 Small-World-Graphen

Wie bereits bei den Beispielen realer Netzwerke angemerkt wurde, beschreiben Zufallsgraphen eine Eigenschaft solcher Netzwerke in guter Näherung: Die charakteristischen Weglängen sind – wie im Zufallsgraphen – mehrere Größenordnungen kleiner als die Knotenanzahl. Dafür entsprechen andere Eigenschaften der Zufallsgraphen nicht den Beobachtungen. WATTS und

STROGATZ (1998) schlagen ein Netzwerkmodell vor, das neben der kurzen charakteristischen Weglänge auch die Eigenschaft hoher, von der Netzwerkgröße unabhängiger Cliquenkoeffizienten abbilden soll.

Sie gehen von einem regelmäßigen Grundgitter aus. Gemäß einem Parameter $0 < \phi < 1$ sollen nun vorhandene Verbindungen durch Verbindungen beliebiger Knoten unabhängig von ihrem Gitterabstand ersetzt werden.

Definition 13 *Seien auf einem quadratischen (bzw. kubischen bzw. hyperkubischen) Gitter in d Dimensionen die Knoten durch d Koordinaten beschrieben, so daß jeder Punkt durch ein d -Tupel ganzer Zahlen beschrieben wird. Dann heißt die sich ergebende Metrik Gitterabstand*

$$d_{\text{Gitter}}(x, y) = \sum_{i=1}^d |x_i - y_i|.$$

Der Gitterabstand fungiert dabei als Metrik in der Einbettungsgeometrie, die die Geometrie des Grundgitters ist, und ersetzt damit die euklidische Geometrie des Einbettungsraumes.

Seien L Knoten in einer Linie angeordnet. Es gebe periodische Randbedingungen, so daß die Knoten wie auf einem Kreis liegen. Jeder Knoten sei nun mit den l links und l rechts liegenden Knoten verbunden, wobei $l \geq 2$. Nun gehe man jede der lL Verbindungen durch und ersetze sie mit der Wahrscheinlichkeit ϕ durch eine Verbindung zu einem zufällig ausgewählten Knoten, ohne allerdings doppelte Verbindungen oder Verbindungen mit gleichem Start- und Zielknoten zu bilden (Abb. 4.3). Wenn $\phi = 0$ erhält man ein regelmäßiges Gitter, für $\phi = 1$ dagegen einen Zufallsgraphen – allerdings mit der Einschränkung, daß jeder Knoten über mindestens l Verbindungen verfügt. So erlaubt der Parameter ϕ einen stetigen Übergang zwischen regelmäßigen Gittern und Zufallsgraphen. Der mittlere Verknüpfungsgrad ist unabhängig von ϕ gegeben durch $\langle k \rangle = 2l$

Die erstaunliche Feststellung bei diesem Modell war, daß bereits für sehr kleines ϕ die charakteristische Weglänge in der Größenordnung eines Zufallsgraphen liegt, gleichzeitig aber der Cliquenkoeffizient Werte hat, wie sie dem regulären Gitter entsprechen.

Dies ist nachvollziehbar: Die charakteristische Weglänge ist eine globale Eigenschaft des Netzwerkes und reagiert bereits auf wenige *Fernverbindungen* empfindlich, wohingegen die lokale Eigenschaft Cliquenkoeffizient von diesen wenigen Änderungen keine Notiz nimmt. Hier ist die Bezeichnung Fernverbindung intuitiv klar, wenn man jedoch von der Art und Weise, wie ein Netzwerk erzeugt wurde, absieht, ist dies nicht offensichtlich. Eine präzise Definition schlagen PANDIT und AMRITKAR (1999) vor. Sie bezeichnen eine

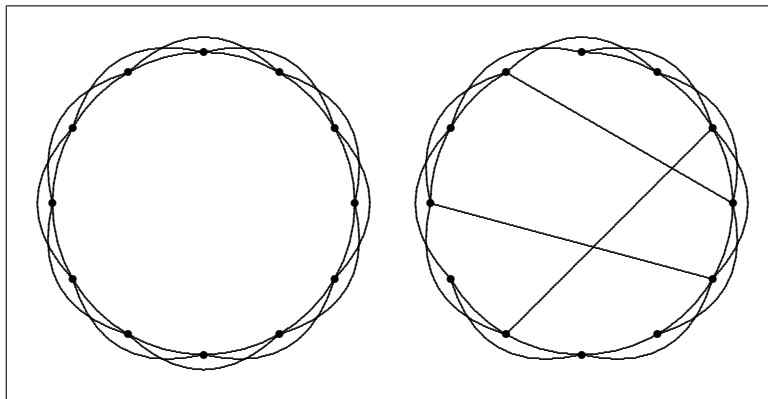


Abbildung 4.3: Konstruktion eines eindimensionalen Small-World-Graphen (Typ A) mit $l = 2$.

Verbindung zwischen i und j dann als Fernverbindung, wenn der Minimalabstand von i und j ohne die direkte Verbindung zwischen ihnen größer als zwei ist.

Das beschriebene Netzwerkmodell ist als *Small-World-Graph* bekannt geworden. Es wurde in vielfältigen Situationen untersucht und eingesetzt. Meist geht man von einer eindimensionalen Einbettungsgeometrie aus, prinzipiell kann das Modell jedoch auch in jeder anderen Geometrie eingebettet werden.

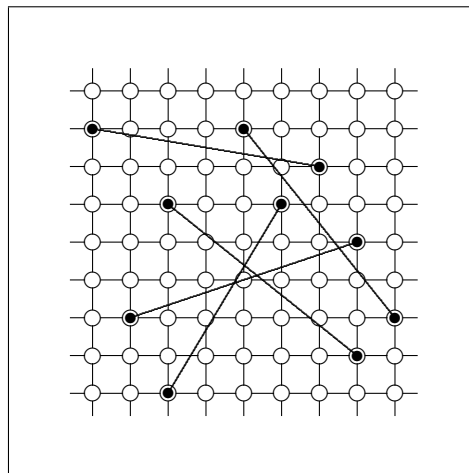


Abbildung 4.4: Fernverbindungen im zweidimensionalen Small-World-Graph.

Definition 14 Sei ein d -dimensionales Gitter gegeben, in dem jeder Knoten mit den l auf dem Gitter benachbarten Punkten in jeder der d Richtungen

verbunden ist. Das Gitter habe die Größe L^d und periodische Randbedingungen. Die daraus durch Abändern von Verbindungen mit Wahrscheinlichkeit ϕ hervorgehenden Graphen heißen d -dimensionale Small-World-Graphen des Typs A.

Werden mit Wahrscheinlichkeit ϕ pro bestehender Verbindung neue Verbindungen hinzugefügt, ohne das Grundgitter abzuändern, so heißen die entstehenden Graphen d -dimensionale Small-World-Graphen des Typs B.

Wird eine feste Zahl M an neuen Verbindungen hinzugefügt, ohne das Grundgitter zu ändern, so heißen die Graphen d -dimensionale Small-World-Graphen des Typs C.

Statt bestehende Verbindungen aufzulösen, werden beim Typ B neue Verbindungen hinzugefügt. Dies verändert die Eigenschaften des Modells nicht wesentlich, solange $\phi l L \ll L$ also $\phi \ll 1/l$. In diesem Fall werden aus numerischen Gründen mitunter auch doppelte Verbindungen zwischen zwei Knoten und Verbindungen von einem Knoten zu sich selbst zugelassen (NEWMAN 2000; NEWMAN et al. 2000; NEWMAN und WATTS 1999a; NEWMAN und WATTS 1999b).

Wenn im folgenden gesagt wird, ein Small-World-Graph habe eine bestimmte Eigenschaft, so bezieht sich dies auf das Ensemble der Small-World-Graphen mit den entsprechenden Parametern.

4.3.1 Der Cliquenkoeffizient

Für WATTS und STROGATZ (1998) war es in verschiedener Hinsicht wichtig, einen hohen Cliquenkoeffizienten zu erzeugen. Deswegen forderten sie $k > 2d$, sonst ist, wie man sich leicht klar macht $C = 0$. Was aber passiert im Fall $k = 2d$ für den d -dimensionalen Fall? Eine wesentliche Eigenschaft des Netzwerkes bleibt auch dann erhalten, daß nämlich bereits wenige zufällige Verbindungen genügen, um die globalen Eigenschaften, speziell die charakteristische Weglänge, stark zu verändern. Dazu bedarf es nur eines regelmäßigen Grundgitters, das lokal kurze Weglängen sichert. In Ihrer Arbeit zur Harmonie in Netzwerken haben MARCHIORI und LATORA (2000) gezeigt, daß es möglich ist, einen Begriff für den Abstand zu finden, der nicht nur, wie die mittlere Weglänge, auf großen sondern auch auf kleinen Skalen die Eigenschaften des Netzwerkes erfassen kann. Er verbindet so die Konzepte des mittleren Abstandes und des Cliquenkoeffizienten. Dabei zeigt sich, daß die Besonderheit der Small-World-Netzwerke, wie sie von WATTS und STROGATZ (1998) vorgestellt wurden, darin bestehen, daß die allgemeine Güte des Netzwerkes hoch ist: Man kann sowohl für auf dem Gitter weit voneinander entfernte Knoten eine vergleichsweise kurze Verbindung finden,

als auch für Knoten mit geringem Gitterabstand. Damit tritt der Begriff des Cliquenkoeffizienten für die Diskussion der minimalen Abstände zurück. Deshalb ist es durchaus möglich, ein zugrundeliegendes Gitter, bei dem nur die unmittelbar benachbarten Knoten miteinander verbunden sind, zu betrachten, obwohl dieses einen Cliquenkoeffizienten von Null besitzt. Dies geht im übrigen auch aus dem von NEWMAN und WATTS (1999a) vorgeschlagenen Renormalisierungsverfahren hervor, in dem die Verbindungen zu den k links und rechts nächsten Knoten in den ersten Schritten zu einer einzigen Verbindung zusammengefaßt werden.

4.3.2 Die Verteilung der Verknüpfungsgrade

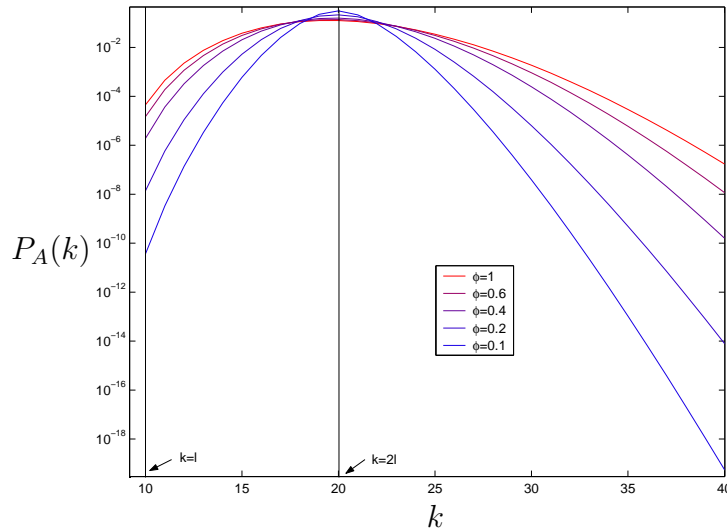


Abbildung 4.5: Eindimensionaler Small-World-Graph (Typ A): Verteilung des Grades $P_A(k)$ über k für verschiedene ϕ mit $l = 10$ gemäß Gleichung (4.2).

Im Fall $\phi = 0$ liegt ein reguläres d -dimensionales Gitter mit Verbindungen zu den je l nächsten Nachbarn in jeder Richtung vor, in dem jeder Knoten einen Verknüpfungsgrad $k_i = 2ld$ hat.

Für $\phi > 0$ bleiben beim Typ A ld Kanten fest mit jedem Knoten verbunden, die anderen werden mit Wahrscheinlichkeit ϕ abgeändert. Jeder Knoten hat also $k_i = ld + n_i$ Verbindungen, wobei $n_i = n_i^1 + n_i^2$ in die nicht geänderten, aber abänderbaren Verbindungen n_i^1 und in die neu hinzugekommenen Verbindungen n_i^2 zerfällt. Da eine Verbindung mit der Wahrscheinlichkeit ϕ abgeändert wird, ist die Verteilung der n_i^1 gegeben durch die Binomialverteilung

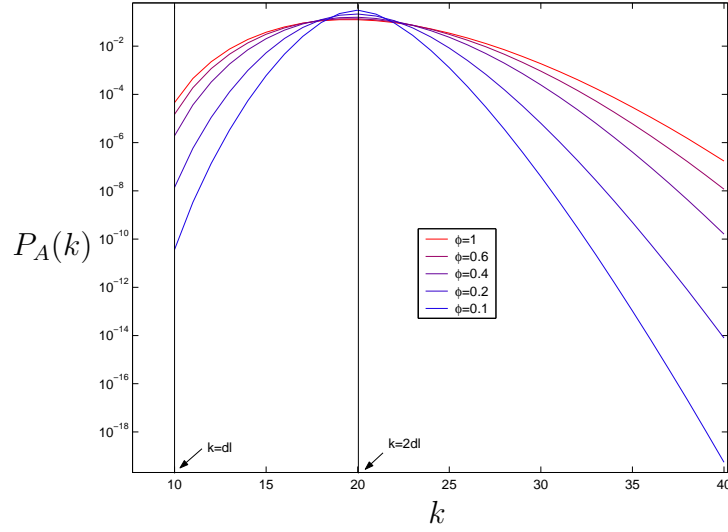


Abbildung 4.6: Zweidimensionaler Small-World-Graph (Typ A): Verteilung des Grades $P_A(k)$ über k für verschiedene ϕ mit $l = 5$ gemäß Gleichung (4.2).

lung

$$P_1(n_i^1) = \binom{dl}{n_i^1} (1 - \phi)^{n_i^1} \phi^{dl - n_i^1}.$$

Da die Wahrscheinlichkeit eine neue Verbindung zu bekommen gleich ϕ/L^d ist, ergibt sich

$$P_2(n_i^2) = \binom{dlL^d}{n_i^2} \left(\frac{\phi}{L^d}\right)^{n_i^2} \left(1 - \frac{\phi}{L^d}\right)^{dlL^d - n_i^2}.$$

Die Gesamtverteilung kann man zu

$$P_A(k) = \sum_{i=0}^{\min(k-dl, dl)} \binom{dl}{i} (1 - \phi)^i \phi^{dl-i} \times \binom{dlL^d}{k-i-dl} \left(1 - \frac{\phi}{L^d}\right)^{k-i-dl} \left(\frac{\phi}{L^d}\right)^{dl(L^d+1)-k+i} \quad (4.2)$$

berechnen (BARRAT und WEIGT 1999). Analog folgt für den Typ B

$$P_B(k) = \binom{dlL^d}{k-2dl} \left(1 - \frac{\phi}{L^d}\right)^{k-2dl} \left(\frac{\phi}{L^d}\right)^{dl(L^d+2)-k}.$$

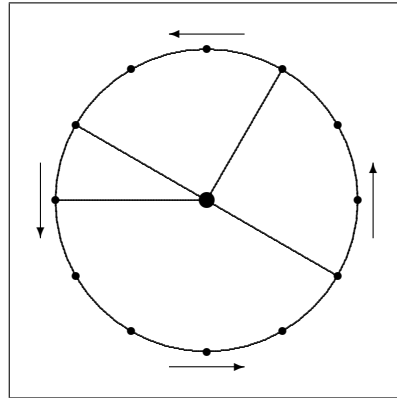


Abbildung 4.7: Smallest-World-Graph: Auf dem Kreis darf nur gegen den Uhrzeigersinn gelaufen werden, die Verbindungen zum Zentrum sind in beiden Richtungen verwendbar.

4.3.3 Exakt lösbares Modell

Man betrachte nun ein modifiziertes Modell (vgl. Abb 4.7).

Definition 15 *Es seien L Knoten auf einem Ring angeordnet. Jeder Knoten sei mit seinem linken Nachbarn durch eine gerichtete Verbindung der Länge eins verknüpft. Mit Wahrscheinlichkeit ϕ sollen Knoten aus den L ausgewählt werden. Diese werden durch ungerichtete Verbindungen untereinander verbunden, so daß sie einen vollständigen Untergraphen bilden. Dieses Modell bezeichnet man als gerichteten Smallest-World-Graphen. Die Menge aller solcher Graphen zu den Parametern L und ϕ werde mit $\mathcal{S}'_{L,\phi}$ bezeichnet.*

Äquivalent hätte man nach den L Knoten auf einem Ring auch einen weiteren Punkt ergänzen und mit den ausgewählten Knoten durch ungerichtete Kanten der Länge $1/2$ verbinden können, statt einen vollständigen Untergraphen einzufügen. Im folgenden wird dies der Klarheit wegen der Sprachgebrauch sein.

Satz 2 *Das Mittel der charakteristischen Weglänge über alle $\Gamma \in \mathcal{S}'_{L,\phi}$ ist*

$$\langle \ell \rangle = \frac{1}{L-1} \left[\frac{2-\phi}{\phi} L - \frac{3}{\phi^2} + \frac{2}{\phi} + \frac{(1-\phi)^L}{\phi} \left(L - 2 + \frac{3}{\phi} \right) \right].$$

Beweis: Es sei $P(l|r)$ die Wahrscheinlichkeit, Minimalabstand l zu finden zwischen Knoten mit Gitterabstand r . Für diese Verteilung gilt die Beziehung $\sum_{l=1}^{L-1} P(l|r) = \sum_{l=1}^r P(l|r) = 1$. Um einen Weg mit $l < r$ zu finden, müssen zwei Knoten mit dem Zentrum verknüpft sein, was mit Wahrscheinlichkeit

ϕ^2 der Fall ist. Man mache sich klar, daß man für den günstigen Weg nur maximal einmal den zentralen Knoten überquert. Ist der so entstehende Weg länger als eins, so kommt eine Anzahl von $l - 1$ Knoten hinzu, die nicht mit dem zentralen Knoten verbunden sind, was zu einem Faktor $(1 - \phi)^{l-1}$ führt. Da diese $l - 1$ Knoten auf l verschiedene Arten an den Beginn und das Ende des Weges verteilt werden können, ist

$$\begin{aligned} P(l < r|r) &= l\phi^2(1 - \phi)^{l-1} \\ P(l = r|r) &= 1 - \phi^2 \sum_{i=1}^{r-1} i(1 - \phi)^{i-1}. \end{aligned}$$

Es folgt

$$P(l) = \frac{1}{L-1} \sum_{r=l}^{L-1} P(l|r).$$

Über vollständige Induktion über l zeigt man folgende Relationen

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^l i(1 - \phi)^{i-1} &= \frac{1}{\phi^2} - \frac{(1 - \phi)^l}{\phi^2} (1 + l\phi) \\ \sum_{i=1}^l i^2(1 - \phi)^{i-1} &= \frac{2 - \phi}{\phi^3} - \frac{(1 - \phi)^l}{\phi^3} (\phi^2 l^2 + \phi - 2) \\ \sum_{i=1}^{l-1} i^3(1 - \phi)^{i-1} &= \frac{6 - 6\phi + \phi^2}{\phi^4} - \frac{(1 - \phi)^l}{\phi^4} \times \\ &\quad \times (l^3\phi^3 + 3l^2\phi^2 - 3l\phi^2 + \phi^2 + 6l\phi - 6\phi + 6). \end{aligned}$$

Damit erhält man

$$\begin{aligned} P(l) &= \frac{1}{L-1} \left[1 - \phi^2 \sum_{i=1}^{l-1} i(1 - \phi)^{i-1} + \sum_{r=l+1}^{L-1} l\phi^2(1 - \phi)^{l-1} \right] \\ &= \frac{1}{L-1} \left[(1 + \phi l - \phi)(1 - \phi)^{l-1} + (L - 1 - l)l\phi^2(1 - \phi)^{l-1} \right] \\ &= \frac{1}{L-1} \left[1 + \phi(l - 1) + (L - 1 - l)l\phi^2 \right] (1 - \phi)^{l-1}. \end{aligned}$$

Mit obigen Resultaten kann der Ausdruck

$$\langle l \rangle = \sum_{L-1}^{l=1} lP(l)$$

ausgewertet werden, um das im Satz angegebene Ergebnis zu erhalten (DOROGVTSEV und MENDES 1999). *qed.*

Nun kann man zu einem kontinuierlichen Modell übergehen, indem man $L \rightarrow \infty$, $\phi \rightarrow 0$ und $l \rightarrow \infty$ gehen läßt und gleichzeitig $M = \phi L$ und $x = l/L$ konstant hält. Die Verteilung des Minimalabstandes ist dann gegeben durch

$$\begin{aligned} \tilde{P}(x, M) &= \lim_{L \rightarrow \infty} LP(l = xL) \\ &= \lim_{L \rightarrow \infty} \frac{L}{L-1} \left[1 + xM - \frac{M}{L} + xM^2 \left(1 - \frac{1}{L} - x \right) \right] \left(1 - \frac{M}{L} \right)^{xL-1} \\ &= [1 + xM + xM^2(1-x)]e^{-xM}. \end{aligned}$$

Eine Erweiterung dieses Ergebnisses auf ein ungerichtetes Smallest-World-

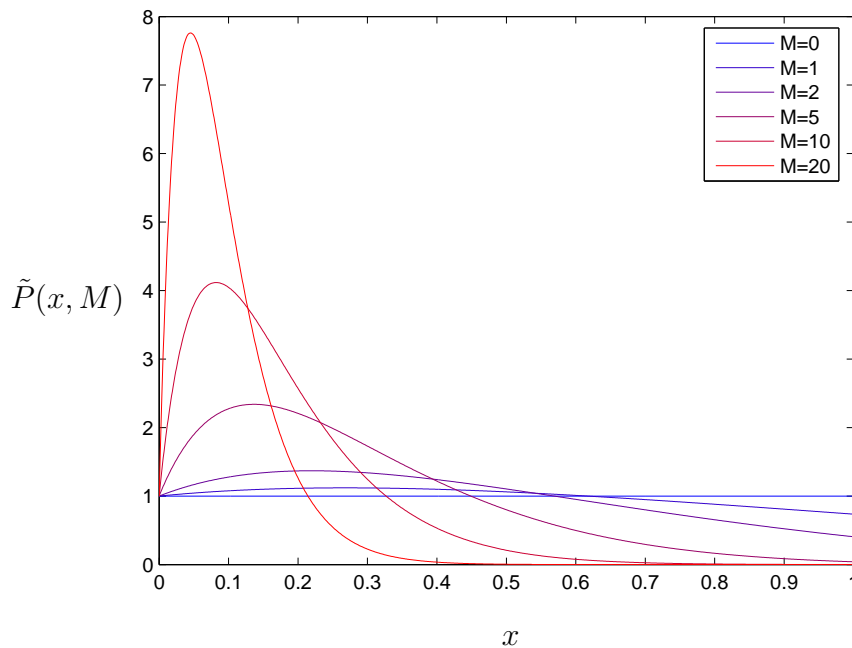


Abbildung 4.8: Smallest-World-Graph. Verteilung $\tilde{P}(x, M)$ der normalisierten kürzesten Weglänge x bei M Verbindungen zum zentralen Knoten.

Modell ist möglich, aber rechnerisch recht kompliziert. Das Ergebnis des Kontinuumsfalls stimmt jedoch mit dem des gerichteten Modells bis auf einen Faktor zwei überein, was intuitiv zu erwarten war.

4.3.4 Skalenverhalten und Phasenübergang

Für die charakteristische Weglänge ℓ wurde von BARTHÉLÉMY und AMARAL (1999) der Skalenansatz

$$\ell(L, \phi) = \xi F\left(\frac{L}{\xi}\right)$$

für eindimensionale Small-World-Graphen vorgeschlagen, wobei $F(x \ll 1) \sim x$ und $F(x \gg 1) \sim \ln x$. Wie bereits bemerkt wurde, liegen die typischen Werte der charakteristischen Länge von Small-World-Graphen im Bereich von Zufallsgraphen, daher der logarithmische Verlauf gemäß Gleichung (4.1, S. 17). Für kleine Systemgrößen L hingegen haben die Fernverbindungen kaum eine Auswirkung, es dominiert das reguläre Gitter. Daher ist mit einem linearen Verlauf der Skalenfunktion zu rechnen. Es gibt dann einen Verlauf

$$\xi \sim \phi^{-\nu}. \quad (4.3)$$

Die erste Berechnung von $\nu = 2/3$ wurde später von BARRAT (1999) zu $\nu = 1$ korrigiert. Das heißt, für jedes ϕ gibt es eine Umschlaggröße ξ unterhalb der ein reguläres Gitter vorliegt, oberhalb der aber ein Small-World-Verhalten beobachtet wird. Der Schluß, es liege deswegen kein Phasenübergang zwischen regulärem Gitter und Small-World-Graphen vor, wurde von NEWMAN und WATTS (1999a) widerlegt. Man betrachte die Größe des Systems L als variabel bei festem ϕ . Für sehr kleine L wird es dann gar keine Fernverbindung geben, für sehr großes L aber sehr viele. Der Übergang finde bei $L = \xi$ statt. Es ist klar, daß am Übergang die ersten Fernverbindungen, die einen starken Einfluß auf ℓ haben, entstehen, also bei $\phi\xi \approx 1$. Daraus folgt $\xi \sim \phi^{-1}$ also $\nu = 1$. Sie bezeichnen die Umschlaggröße ξ als vergleichbar einer Korrelationslänge in der statistischen Physik, die für $\phi = 0$ divergiert, so daß in diesem Fall (außer der Gitterkonstanten) keine charakteristische Längenskala bleibt. Daraus folgt die Existenz eines Phasenübergangs für $\phi = 0$.

Sie argumentieren weiter für $l = 1$ mit der allgemeinen (im eindimensionalen Fall äquivalenten) Skalenfunktion

$$\ell = Lf\left(\frac{L}{\xi}\right)$$

und $f(x) \sim \text{konst.}$ für $x \ll 1$ und $f(x) \sim \ln x/x$ für $x \gg 1$. Woraus mit Gleichung (4.3) folgt

$$\ell = Lf(\phi^\nu L), \quad (4.4)$$

wobei ein konstanter Faktor von $f(x)$ absorbiert wurde.

Wenn nur eine Renormalisierung im eindimensionalen Modell durchgeführt wird, bei der jeweils zwei benachbarte Knoten zusammengefaßt werden, so bleibt die Zahl der Fernverbindungen im wesentlichen konstant⁶. Dies führt zu einer Verdopplung der entsprechenden Wahrscheinlichkeit der Verknüpfung. Der Minimalabstand zweier Knoten wird nur zu einem kleinen Teil durch Fernverbindungen realisiert und zu einem großen Teil durch Wegstücke auf dem regulären Gitter. Deswegen halbiert sich die charakteristische Weglänge bei der Renormalisierung

$$L' = L/2 \quad \phi' = 2\phi \quad \ell' = \ell/2. \quad (4.5)$$

Im Fall $\phi \ll 1$, aber fest und sehr großer Systemgröße kann man Gleichung (4.5) in Gleichung (4.4) einsetzen und erhält

$$1 = \frac{\ln(\phi^\nu L')}{\phi^\nu} \frac{\phi^\nu}{\ln(\phi^\nu L)}.$$

Es folgt

$$\ln L - 2^{1-\nu} \ln 2L = \nu (2^{1-\nu} \ln 2\phi - \ln \phi).$$

Wegen der Unabhängigkeit von ϕ und L muß $\nu = 1$ sein.

Für ein d -dimensionales Grundgitter mit L^d Knoten ergeben sich die Skalenrelationen

$$L' = L/2 \quad \phi' = 2^d \phi \quad \ell' = \ell/2 \quad (4.6)$$

und mit der Skalenfunktion (4.4) schließt man wie oben

$$\ln L - 2^{1-d\nu} \ln 2L = \nu(2^{1-d\nu} \ln 2\phi - \ln \phi),$$

was zu $\nu = 1/d$ führt. Dies wurde auch numerisch bestätigt (ARGOLLO DE MENEZES et al. 2000).

NEWMAN und WATTS (1999a) sprechen mit Hinweis auf die Divergenz von ξ von einem kontinuierlichen Phasenübergang und unterstreichen dies mit dem Hinweis auf den mittleren Abstand zweier Enden von Fernverbindungen $\sim \phi^{-1/d}$, dem ξ entspreche (1999b). Von ARGOLLO DE MENEZES et al. (2000) wurde entgegnet, daß tatsächlich ein Übergang erster Ordnung vorliege. Sie definieren den Ordnungsparameter $\mathcal{L}(\phi) := \ell/L$, der im thermodynamischen Grenzfall eine Unstetigkeit aufweist. Die Umschlaggröße (hier

⁶Im Gegensatz zu den Aussagen von NEWMAN und WATTS (1999a) bleibt sie nicht exakt konstant, wie man sich an einfachen Beispielen bewußt machen kann.

als *persistence size* bezeichnet) $\xi \sim \phi^{-1/d}$ ist, wie sie zeigen, mit einer Verschiebung der kritischen Wahrscheinlichkeit um $\Delta\phi \sim L^{-d}$ verbunden, die durch die endliche Größe hervorgerufen wird. Dementsprechend ist dies auch kein Widerspruch zu einem Phasenübergang, wie von BARTHÉLÉMY und AMARAL (1999) behauptet. Die Größe

$$\mathcal{L}(\phi) = \lim_{L \rightarrow \infty} \frac{\ell}{L} \quad (4.7)$$

ist für jedes $\phi > 0$ gleich Null, da ab einer bestimmten Systemgröße auch bei kleinstem ϕ Fernverbindungen auftauchen, die dazu führen, daß $\ell \sim \ln L$. Nur bei $\phi = 0$ skaliert die charakteristische Weglänge mit L und folglich ist $\mathcal{L}(\phi = 0) > 0$.

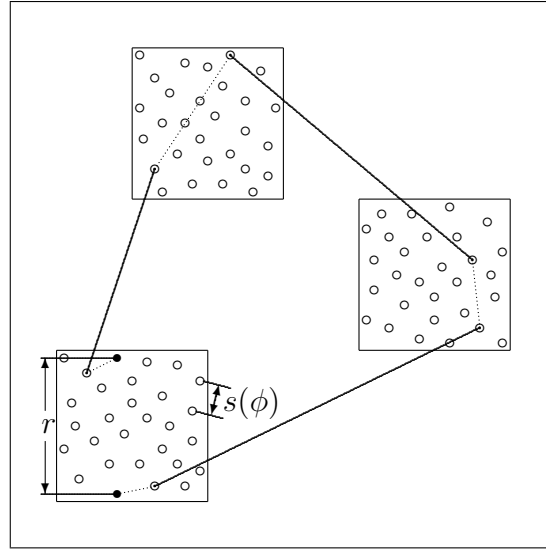


Abbildung 4.9: Man unterteilt das Gitter in Blöcke der Größe r , dem Gitterabstand der beiden ausgefüllt dargestellten Knoten, um daraus den Minimalabstand $\ell(r)$ abzuschätzen, wenn $r > s(\phi)$, wobei $s(\phi) \sim \phi^{-1/d}$ der typische Abstand zweier Enden von Fernverbindungen ist. Die Wegstücke innerhalb der Blöcke sind gestrichelt, durchgezogen die Fernverbindungen, die typischerweise zwischen verschiedenen Blöcken verlaufen.

Weiterhin zeigen ARGOLLO DE MENEZES et al. (2000), warum sie die mittlere Entfernung der Endpunkte zweier Fernverbindungen $s(\phi) \sim \phi^{-1/d}$ nicht für relevant halten. Sie betrachten den Minimalabstand $\ell(r)$ zweier Knoten mit Gitterabstand r (vgl. Abb. 4.9). Falls $r \leq s(\phi)$ ist $\ell(r) = r$. Nun sei $s(\phi) < r \ll L$. Das Gitter werde in Blöcke der Größe r geteilt, so daß die beiden Punkte an den Rändern eines Blockes liegen, von denen es dann $\tilde{N} = (L/r)^d$ gibt. Wegen $r \ll L$ liegen nur wenige Fernverbindungen ganz

in einem r^d -Block. Also ist die Zahl der Fernverbindungen, die die Blöcke verbinden, $\tilde{M} = M = \phi L^d$, woraus für den mittleren Grad eines Blockes folgt

$$\langle \tilde{k} \rangle = \frac{2M}{\tilde{N}} = 2\phi r^d.$$

Da es sehr unwahrscheinlich ist, im Block, in dem die beiden zu verbindenden Knoten liegen, eine Fernverbindung zu finden, werden geschlossene Kurven gesucht, die über mindestens einen weiteren Block laufen. Es können in n Schritten etwa $\langle \tilde{k} \rangle^n$ Blöcke erreicht werden, was der Wahrscheinlichkeit, eine geschlossene Kurve zu finden, proportional ist. Man wird also nach etwa

$$n = \frac{\ln \tilde{N}}{\ln \langle \tilde{k} \rangle} \sim \frac{\ln(L/r)}{\ln(r\phi^{1/d})}$$

Schritten im Ausgangsblock ankommen. Dabei wurde in jedem Block mindestens ein Weg $s(\phi)$ zurückgelegt. Dies bedeutet, der Weg über Fernverbindungen lohnt sich erst dann, wenn der Gitterabstand zweier Knoten r folgende Abschätzung erfüllt

$$r \gtrsim s(\phi) \frac{\ln(L/r)}{\ln(r\phi^{1/d})}.$$

Ähnliche Ausdrücke wurden auch auf anderem Wege gefunden (MOUKARZEL 1999; MOUKARZEL und ARGOLLO DE MENEZES 1999).

4.3.5 Weitere Eigenschaften von Small-World-Graphen

Dynamiken auf Small-World-Gittern werden in Kapitel 6 behandelt. Daneben sind vielfältige weitere Eigenschaften von Small-World-Gittern untersucht worden. Es gibt Berechnungen zu Ising-Modellen, deren Wechselwirkung eine Small-World-Struktur hat (HASTINGS 2003; KOZMA et al. 2004; BARRAT und WEIGT 1999).

KLEINBERG (2001) hat sich mit der Bedeutung des Informationsbegriffes in Small-World-Netzwerken befaßt. Zudem widmete er sich der Frage, unter welchen Bedingungen ein kurzer Weg zwischen weit entfernten Knoten mit nur lokaler Kenntnis des Graphen gefunden werden kann (KLEINBERG 1999; KLEINBERG 2000).

Es wurden Zufallsläufe (ENGL. random walks) auf Small-World-Graphen untersucht (ALMAAS et al. 2003; ALMAAS et al. 2002), die Eigenschaften des zu solchen Graphen gehörenden Laplace-Operators (MONASSON 1999), soziale Interaktion (KLEMM et al. 2003), sowie Modelle mit Small-World-Struktur, die gewichtete Verbindungen besitzen (LI und CHEN 2003).

4.4 Skalenfreie Graphen

Popularity is attractive

BARABÁSI und ALBERT (1999)

Es wurde bereits darauf hingewiesen, daß reale Netzwerke eine Gradverteilung in Form eines Potenzgesetzes $P(k) \propto k^{-\gamma}$ aufweisen. Da im Gegensatz zum exponentiellen Abfall bei einem Potenzgesetz keine Längenskala vorgegeben ist, spricht man von *skalenfreier* Struktur (ENGL. scale-free). Der Typ von Graph, der so bezeichnet wird, ist jedoch nicht nur durch das Potenzgesetz charakterisiert. Im engeren Sinn wird der Begriff *skalenfreies Netzwerk* für das Barabási-Albert-Modell verwendet. Die Verwendung von verallgemeinerten Zufallsgraphen mit entsprechender Gradverteilung (vgl. S. 4.2) war vor allem deshalb keine befriedigende Situation, weil keine Aussage dazu gemacht wurde, welcher Mechanismus dazu führt, daß ein Netzwerk eine skalenfreie Gradverteilung besitzt.

Der Vorschlag von BARABÁSI und ALBERT (1999) war, nicht mehr eine feste Zahl von Knoten zu betrachten, sondern ein wachsendes Netzwerk, dessen neue Knoten bevorzugt Verbindungen zu Knoten bilden, die einen hohen Verknüpfungsgrad aufweisen. Dieses *bevorzugte Verbinden* (ENGL. preferential linking) ist die entscheidende Zutat, um die gewünschte Gradverteilung zu erzeugen. Andererseits ist diese Bedingung leicht interpretierbar: Wenn neue Seiten ins WWW gestellt werden, wird man dort häufiger Verweise auf sehr bekannte andere Seiten finden, als auf völlig unbekannte. Ebenso wird auf schon viel zitierte Artikel häufiger verwiesen werden, als auf solche, die bislang kaum Beachtung gefunden haben – Popularität ist anziehend.

Das bevorzugte Verbinden kann unterschiedliche Formen annehmen. Der einfachste Fall ist, wenn die Wahrscheinlichkeit, daß der neue Knoten mit einem alten verbunden wird, proportional zum Grad k_i dieses alten Knotens ist. Man beginne mit einem Knoten und füge in jedem Zeitschritt einen Knoten mit genau einer Verbindung hinzu, die Knoten werden benannt nach dem Zeitschritt, in dem sie eingefügt wurden. Nach t Schritten, gibt es t Verbindungen und die Wahrscheinlichkeit, mit dem i -ten Knoten verbunden zu werden, ist $k_i/2t$. Die Wahrscheinlichkeit, daß der Knoten s nach t Schritten den Grad k habe, ist $p(k, s, t)$. Es gilt folgende Mastergleichung

$$p(k, s, t) = \frac{k-1}{2t} p(k-1, s, t) + \left(1 - \frac{k}{2t}\right) p(k, s, t) \quad (4.8)$$

mit der Anfangsbedingung $p(k; s=0, 1; 1) = \delta_{k,1}$ und der Randbedingung $p(k, t, t) = \delta_{k,1}$. Der erste Term gibt die Wahrscheinlichkeit an, daß s im letzten Zeitschritt noch $k-1$ Verbindungen hatte und nun mit dem neuen Knoten verbunden wurde; der zweite Term steht für den Fall, daß der Knoten

s bereits genau k Verbindungen hatte und auch keine hinzugekommen ist. Für die Verteilung des Grades zum Zeitpunkt t gilt

$$P(k, t) = \frac{1}{t+1} \sum_{s=0}^t p(k, s, t).$$

Es folgt

$$\begin{aligned} (t+2)P(k, t+1) - \delta_{k,1} - (t+1)P(k, t) &= \\ &= \frac{t+1}{2t} [(k-1)P(k-1, t) - kP(k, t)]. \end{aligned} \quad (4.9)$$

Weiterhin ist

$$\begin{aligned} P(k, t+1) - P(k, t) &= \frac{1}{t+2} \sum_{s=0}^{t+1} p(k, s, t+1) - \frac{1}{t+1} \sum_{s=0}^t p(k, s, t) \\ &\approx \frac{1}{t+1} p(k, t+1, t+1) \\ &= \frac{\delta_{k,1}}{t+1}. \end{aligned}$$

Dies gilt im Grenzfall großer t . Dann wird aus Gleichung (4.9) für $t \rightarrow \infty$

$$P(k) + \frac{1}{2} [kP(k) - (k-1)P(k-1)] = 0$$

beziehungsweise

$$P(k) = \frac{k-1}{k+2} P(k-1).$$

Die Lösung dieser Gleichung hat die Form

$$P(k) \propto \frac{1}{k(k+1)(k+2)},$$

die für große k mit $P(k) \propto k^{-3}$.

Ein anderer Ansatz geht von einem Kontinuumslimit aus. Es gilt

$$\frac{\partial k_i}{\partial t} = \frac{k_i}{2t}.$$

Mit der Anfangsbedingung $k_i(t_i) = 1$ ist die Lösung

$$k_i(t) = \left(\frac{t}{t_i} \right)^\beta \quad \text{mit } \beta = \frac{1}{2}.$$

Die Wahrscheinlichkeit, ein $k_i(t)$ kleiner als k zu finden, ist damit

$$P_t(k_i(t) < k) = P(t_i > \frac{t}{k^{1/\beta}}).$$

Mit der Verteilung der Zeitintervalle $P_t(t_i) = 1/(1+t)$ erhält man

$$P_t(t_i > \frac{t}{k^{1/\beta}}) = 1 - \frac{t}{k^{1/\beta}(t+1)}$$

und damit

$$P_t(k) = \frac{\partial P_t(k_i(t) < k)}{\partial k} = \frac{t}{\beta(t+1)k^{1/\beta+1}}.$$

Schließlich ergibt sich als asymptotischer Ausdruck

$$P(k) = \lim_{t \rightarrow \infty} = \frac{1}{\beta k^{1/\beta+1}}.$$

Also ist $\gamma = 1/\beta + 1 = 3$, wie es schon aus der Mastergleichung hervorging. Der Zusammenhang von β und γ ist von allgemeiner Natur.

Es wurde gezeigt, daß weder das bevorzugte Verbinden ohne Wachstum, noch Wachstum des Netzwerkes ohne bevorzugtes Verbinden zu skalenfreier Struktur führt (DOROGOVTSSEV und MENDES 2002). Allerdings kann das bevorzugte Verbinden sehr unterschiedliche Formen annehmen, das Netzwerk trägt dennoch die skalenfreie Struktur, jedoch mit anderen Exponenten γ und β . Allgemeine Verknüpfungsregeln wurden von DOROGOVTSSEV und MENDES (2001) mit einem Kontinuumsansatz untersucht; darin wird auch ein *Altern* der Knoten betrachtet, so daß sie trotz hohen Grades nach einer gewissen Zeit weniger „attraktiv“ werden bzw. die Möglichkeit des Absterbens von Verbindungen. Zudem bilden sich beim skalenfreien Graphen Korrelationen zwischen dem Grad der einzelnen Knoten aus, was weder beim Zufallsgraphen noch beim Small-World-Modell der Fall ist.

Für den Cliquenkoeffizienten wurde bislang kein analytischer Ausdruck gefunden. Aus numerischen Betrachtungen weiß man jedoch, daß er um etwa einen Faktor fünf über dem des Zufallsgraphen liegt und damit nicht unabhängig von der Größe des Netzes ist, wie es beim Small-World-Graphen der Fall ist. Von KLEMM und EGUÍLUZ (2002) wurde ein Ansatz vorgeschlagen, der zu höheren Cliquenkoeffizienten führt.

Die charakteristische Weglänge eines skalenfreien Graphen mit L Knoten wurde ebenfalls nur auf empirischer Basis zu

$$\ell = A \ln(L - B) + C$$

bestimmt. Numerische Ergebnisse legen nahe, daß die charakteristische Weglänge kleiner ist als im klassischen Zufallsgraphen.

4.5 Hierarchische Graphen

Eine weitere Eigenschaft von Netzwerken, die besonders in metabolischen Netzwerken beobachtet wurde, ist eine modulare Struktur. Sie äußert sich in starkverknüpften Unterstrukturen, die durch wenige „Brückenverbindungen“ untereinander zusammengehalten werden. Ein Anzeichen solcher Struktur ist ein hoher Cliquenkoeffizient. Allerdings würde man dann erwarten, daß die Verteilung der Grade eine starke Konzentration um den mittleren Verknüpfungsgrad der Module aufweist.

Von RAVASZ et al. (2002) wurden 43 Organismen untersucht. Der Cliquenkoeffizient war unabhängig von der Größe und lag deutlich über dem entsprechender skalenfreier Graphen, die Gradverteilung folgte einem Potenzgesetz mit $\gamma = 2,2$.

Das von RAVASZ et al. (2002) vorgeschlagene Modell sieht vor, mit einem totalverbundenen Graphen mit wenigen m Knoten (in Abb. 4.10 ist $m = 4$) zu beginnen. Dieser wird dann m mal vervielfältigt und die einzelnen Teile mit einem festen Knoten des Ausgangsgraphen verbunden. Der so entstandene Graph kann seinerseits vervielfältigt werden usw. Das Modell wird als *hierarchischer Graph* bezeichnet.

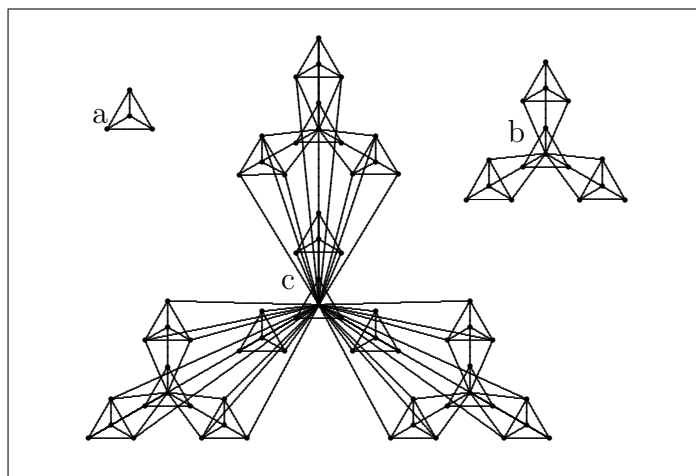


Abbildung 4.10: Bildung eines hierarchischen Graphen: (a) nach einem Schritt, (b) nach zwei Schritten, (c) nach drei Schritten

Ein hierarchischer Graph zeichnet sich durch eine skalenfreie Gradverteilung aus und hat gleichzeitig eine modulare Unterstruktur auf verschiedenen Ebenen, daher der Name. Der Cliquenkoeffizient liegt deutlich über dem von Zufallsgraphen und skalenfreien Graphen. Zudem wurde eine Abhängigkeit des Cliquenkoeffizienten vom Grad der Knoten festgestellt in der Form

$C(k) \propto k^{-1}$, die sich ebenfalls bei den 43 Organismen fand und von RAVASZ und BARABÁSI (2003) als charakteristisch für die hierarchische Struktur identifiziert wurde.

Hierarchischer Aufbau findet sich in verschiedenen realen Netzwerken, z. B. dem Schauspieler-Netzwerk, dem WWW und beim Sprachnetzwerk. Die k^{-1} -Abhängigkeit fand sich jedoch nicht beim Internet (Router-Niveau) und dem amerikanischen Stromnetz. Von RAVASZ und BARABÁSI (2003) wurde vermutet, daß dies an der Eigenschaft dieser Netzwerke liege, aus materiellen Verbindungen zu bestehen, somit Netzwerke zu sein, deren Ausbau Energieaufwand erfordert – beispielsweise im Gegensatz zum WWW. Eine mit solchem Aufwand verbundene Entwicklung des Netzwerkes unterdrücke möglicherweise das Entstehen der hierarchischen Struktur, so ihre Annahme. Die Wahrscheinlichkeit eines Knotens, auf dem minimalen Weg zwischen zwei anderen Knoten zu liegen, wurde ebenfalls als Maß der hierarchischen Struktur vorgeschlagen und folgt in diesem Fall ebenfalls einem Potenzgesetz (ALMAAS und BARABÁSI 2004). Schließlich haben CLAUSET et al. (2004) einen Algorithmus vorgeschlagen, mit dem modulare Strukturen in Netzwerken aufgefunden werden können.

4.6 Räumliche Graphen

Auf die Eigenschaften räumlicher Graphen wird bei GASTNER und NEWMAN (2004b, 2004a) eingegangen. Sie betrachten Graphen mit fester räumlicher Fixierung wie das Straßen- und Eisenbahnnetz, das Internet, das Netzwerk der Flugverbindungen zwischen den Flughäfen und das Netz von Gasleitungen. Während in nicht-räumlichen Graphen die Gleichgewichtung aller Verbindungen naheliegend ist, wird es für die Wirkung von Verbindungen in räumlichen Graphen Unterschiede je nach tatsächlicher Länge einer Verbindung geben. Dies ist einmal im Aufwand der Konstruktion begründet, der bei langen Verbindungen als höher angesehen werden muß und generell möglichst gering gehalten werden wird. Zudem wird das Konzept des Minimalabstandes, bei dem alle Verbindungen gleich gewichtet werden, in solchen Fällen die Netzwerkeigenschaften nur begrenzt erfassen. Deshalb gehen GASTNER und NEWMAN (2004b) zu gewichteten Verbindungen über: Seien i und j verbunden. Falls die Verbindung zwischen ihnen die physische Länge d_{ij} , was meist der euklidische Abstand von i zu j sein wird, hat, so wird die effektive Länge $\mathfrak{d}(i, j)$ durch

$$\mathfrak{d}(i, j) = \lambda\sqrt{N}d_{ij} + (1 - \lambda)$$

definiert. Der Parameter $0 \leq \lambda \leq 1$ gibt an, wie stark die physikalische Länge gegenüber dem Konzept der einheitlichen Länge gewichtet werden soll. Ist er Null, so werden alle Verbindungen als gleichlang betrachtet, ist er eins, so ist ihre Länge bis auf einen Faktor gleich der physischen Länge. Der Faktor \sqrt{N} mit der Zahl der Knoten N , dient der Skalierung. Die effektive Länge eines Pfades ist die Summe der effektiven Längen der enthaltenen Verbindungen. Der effektive Minimalabstand⁷ ist nun die effektive Länge des kürzesten solchen Pfades zwischen zwei Knoten. Für $\lambda = 0$ ist der effektive Minimalabstand genau der bisherige Minimalabstand, für $\lambda = 1$ ist er proportional zum physischen Abstand auf dem eingebetteten Graphen.

Es seien nun N Knoten mit ihrer Lokalisierung im Einbettungsraum und λ gegeben. Zudem sei die maximale physische Gesamtlänge des Netzwerkes $\sum_{\text{Kanten}(i,j)} d_{ij}$ beschränkt. Nun werde ein entsprechendes Netzwerk gebildet, das alle Knoten verbindet und den Anforderungen gerecht wird. Es zeigte sich, daß die Lösungen dieses Optimierungsproblems die Eigenschaften der realen Netzwerke in guter Näherung reproduzieren.

Falls das räumliche Netz der Verteilung einer bestimmten Größe aus einer Quelle dienen soll (Gas, Elektrizität, etc.), so gibt es zwei Extremfälle optimierter Geometrie: Einmal soll die Zahl zudurchlaufender Knoten minimiert werden. Das Ergebnis ist ein sternförmiger Graph, bei dem jeder Knoten direkt mit der Quelle verbunden ist (Abb. 4.11 a). Soll hingegen nur die physische Gesamtlänge minimiert werden, so ist ein *minimaler Baum* die Lösung (Abb. 4.11 b).

Um einen solchen Verteilungsgraphen zu charakterisieren, wird der Routenfaktor definiert

$$\mathfrak{q} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \frac{l_{i0}}{d_{i0}},$$

wobei d_{i0} der euklidische Abstand des Knotens i vom Quellknoten 0, l_{i0} der (physische) Abstand längs des Netzes ist. Es gilt $\mathfrak{q} \geq 1$. Reale Netzwerke haben einen Routenfaktor wenig größer als eins, wie es für den sternförmigen Graphen typisch ist und eine Gesamtkantenlänge $\sum d_{ij}$, die in der Größenordnung des minimalen Baumes liegt, aber deutlich unter der für den Sterngraphen typischen. Durch entsprechende Gewichtung von d_{ij} und l_{0i} können Graphen dieses Typs erzeugt werden.

⁷Der bisherige Minimalabstand wird in diesem Abschnitt als klassischer Minimalabstand bezeichnet.

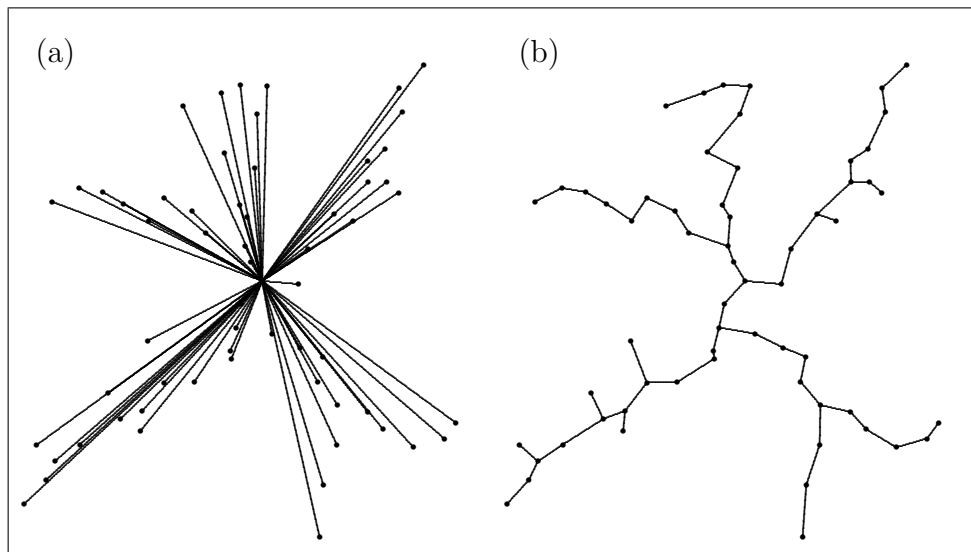


Abbildung 4.11: (a) sternförmiger Graph: geringer (klassischer) Minimalabstand, große physische Gesamtlänge, (b) minimaler Baum: großer (klassischer) Minimalabstand, kleine physische Gesamtlänge

4.7 Exponentielle Zufallsgraphen: Ein verallgemeinernder Ansatz

Die bisherigen Modelle wurden entwickelt, um bestimmte Beobachtungen an realen Graphen abzubilden, wie die charakteristische Weglänge, den Cliquenkoeffizienten oder die Gradverteilung. Von PARK und NEWMAN (2004) wurde folgende Analogie vorgeschlagen: Es gibt zwei physikalische Theorien zur Beschreibung von Gasen, die kinetische Gastheorie und die statistische Mechanik. Während jene intuitiv leicht nachvollziehbar ist, aber schnell komplex wird, so daß nur mit Hilfe von Rechnersimulationen präzise Aussagen für reale Probleme möglich sind, ist diese weniger anschaulich, aber mit ihrer Begründung auf wahrscheinlichkeitstheoretischen Aussagen auf eine Vielzahl von Problemen mit großer Genauigkeit anwendbar. Die Analogie besteht nun darin, daß PARK und NEWMAN (2004) die bisherigen Ansätze der Netzwerktheorie als vergleichbar zur kinetischen Gastheorie bezeichnen. Sie schlagen deswegen eine neue Vorgehensweise vor.

Es sei \mathcal{G} eine Menge von Graphen, hier speziell soll es die Menge der ungerichteten Graphen mit L Knoten ohne Doppel- und Selbstverbindungen sein. Man nehme an, daß eine Menge von Eigenschaften $\{x_i\}$ an dieser Menge \mathcal{G} durch Messung beobachtet wurde, so daß ein Mittelwert $\langle x_i \rangle$ bekannt ist.

Sei $\Gamma \in \mathcal{G}$ ein Graph, der das statistische Gewicht $P(\Gamma)$ besitze, wobei

$$\sum_{\Gamma \in \mathcal{G}} P(\Gamma) = 1.$$

Es soll nun $P(\Gamma)$ derart bestimmt werden, daß der Mittelwert der $\{x_i\}$ den beobachteten Werten entspricht:

$$\langle x_i \rangle = \sum_{\Gamma \in \mathcal{G}} x_i(\Gamma) P(\Gamma).$$

Dies legt die Verteilung $P(\Gamma)$ jedoch nicht eindeutig fest. Deswegen wird eine weitere Annahme gemacht. Analog zur statistischen Physik soll die Entropie

$$S := - \sum_{\Gamma \in \mathcal{G}} P(\Gamma) \ln P(\Gamma)$$

zusätzlich maximiert werden. Dies führt über die Methode der Lagrangemultiplikatoren α und $\{\theta_i\}$ für alle Γ auf die Bedingung

$$\frac{\partial}{\partial P(\Gamma)} \left[S + \alpha \left(1 - \sum_{\Gamma} P(\Gamma) \right) + \sum_i \theta_i \left(\langle x_i \rangle - \sum_{\Gamma'} x_i(\Gamma') P(\Gamma') \right) \right] = 0.$$

Also folgt

$$\ln P(\Gamma) + 1 + \alpha + \sum_i \theta_i x_i(\Gamma) = 0.$$

Führt man die Hamiltonfunktion

$$H(\Gamma) = \sum_i \theta_i x_i(\Gamma)$$

und die Zustandssumme

$$Z = e^{\alpha+1} = \sum_{\Gamma} e^{-H(\Gamma)}$$

ein, so erhält man die Wahrscheinlichkeitsverteilung

$$P(\Gamma) = \frac{e^{-H(\Gamma)}}{Z}.$$

Die Menge \mathcal{G} mit dieser Verteilung $P(\Gamma)$ definiert das Modell des *exponentiellen Graphen*.

Als Beispiel sollen hier Zufallsgraphen mit N Knoten und im Mittel $\langle n \rangle$ Kanten betrachtet werden. Die Hamiltonfunktion ergibt sich für $\Gamma \in \mathcal{G}$ mit der Zahl der Verbindungen $n(\Gamma) = \#V(\Gamma)$ zu

$$H(\Gamma) = \theta n(\Gamma),$$

wobei θ so zu bestimmen sein wird, daß sich der richtige Mittelwert $\langle n \rangle$ ergibt. Es sei σ die *Verbindungsmatrix* (ENGL. adjacency matrix), die durch

$$\sigma_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{wenn } i \text{ und } j \text{ verbunden sind} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

definiert ist. Es gilt $n = \sum_{i < j} \sigma_{ij}$. Die Zustandssumme ergibt sich zu

$$\begin{aligned} Z &= \sum_{\Gamma} e^{-H} = \sum_{\{\sigma_{ij}\}} \exp\left(-\theta \sum_{i < j} \sigma_{ij}\right) \\ &= \prod_{i < j} \sum_{\sigma_{ij}=0}^1 e^{-\theta \sigma_{ij}} = \prod_{i < j} (1 + e^{-\theta}) \\ &= (1 + e^{-\theta})^{\binom{N}{2}}. \end{aligned}$$

In Analogie zur statistischen Physik definiert man die freie Energie zu $F := -\ln Z$, also

$$F = -\binom{N}{2} \ln(1 + e^{-\theta}).$$

Die Zahl der Freiheitsgrade des Systems ist die Zahl möglicher Verbindungen (N über 2, nicht die Zahl der Knoten N). Deswegen ist die freie Energie in dieser Größe extensiv. Nun bestimmt sich der Parameter θ aus

$$\begin{aligned} \langle n \rangle &= \frac{1}{Z} \sum_{\Gamma} n e^{-H} = -\frac{1}{Z} \frac{\partial Z}{\partial \theta} = \frac{\partial F}{\partial \theta} \\ &= \binom{N}{2} \frac{1}{1 + e^{\theta}}. \end{aligned}$$

Der Einfachheit wegen schreibt man

$$\phi = \frac{1}{e^{\theta} + 1}$$

und erhält

$$\langle n \rangle = \binom{N}{2} \phi.$$

Schließlich ergibt sich die Verteilung $P(\Gamma)$ zu

$$P(\Gamma) = \frac{e^{-H}}{Z} = \frac{e^{-\theta n}}{(1 + e^{-\theta})^{\binom{N}{2}}} = \phi^n (1 - \phi)^{\binom{N}{2} - n}.$$

Es zeigt sich, daß dies einem Graphen entspricht, bei dem jede Verbindung genau mit Wahrscheinlichkeit ϕ realisiert ist. Das bedeutet, das Ensemble ist ein Zufallsgraphenensemble (Binomialmodell) $\mathcal{G} = \mathcal{E}_{N,\phi}$.

PARK und NEWMAN (2004) zeigen weitere Analogien zu den Modellen, die bereits von der statistischen Physik untersucht wurden.

5 Small-World-Modell: Verteilung der Minimalabstände im Kontinuumsfall

5.1 Durchführung des Kontinuumslimes

Nun soll die Verteilung der Minimalabstände untersucht werden. Dies geschieht in einem Kontinuumslimes $L \rightarrow \infty$. Mit einer Molekularfeldnäherung gelang es NEWMAN et al. (2000) einen Ausdruck für die Verteilung der Minimalabstände im eindimensionalen Fall zu finden. Sie betrachten dabei ein Small-World-Graphen vom Typ B (vgl. Abs. 4.3, Def. 14, S. 19) im Übergang zum Kontinuum. Es gelte in diesem und den folgenden Abschnitten $l = 1$.

Es zeigt sich aus den Skalenrelationen, daß die Wahrscheinlichkeit neuer Verbindungen ϕ mit L^{-d} skalieren muß, damit der Limes sinnvolle Ergebnisse liefert. Man kann dies daran sehen, daß genau für $\phi L^d = \text{konst.}$ die auf L bezogene charakteristische Weglänge ℓ/L ebenfalls konstant sein wird (vgl. Gl. 4.7 und die zugehörige Diskussion, S. 28). Dies bedeutet umgekehrt, daß es einen festen Erwartungswert ϕL für die Zahl der Fernverbindungen gibt. Anschaulich werden also im Grenzübergang die Fernverbindungen beibehalten und die Knotendichte des Grundgitters wird erhöht. Um diese Anschaulichkeit zu erhalten, wird die Argumentation von NEWMAN et al. (2000) so modifiziert, daß sie zu einem Small-World-Graphen vom Typ C paßt, die Zahl der Fernverbindungen M wird als Parameter vorgegeben. Später wird auch das Skalenverhalten bezüglich M untersucht.

Betrachtet man das d -dimensionale, hyperkubische Grundgitter als eingebettet in den \mathbb{R}^d , so wird der Abstand zweier Knoten in der Einbettungsgeometrie durch die Gitterkonstante a beschrieben. Eine Skala für die Größe des Systems ist durch $D := aL$ gegeben, das Volumen des Netzwerks in der Einbettungsgeometrie ist $V = D^d$. Der mittlere Abstand zweier Enden von Fernverbindungen definiert eine für das Netzwerk typische Längenskala.

$$b = \sqrt[d]{\frac{V}{2M}} = \frac{D}{\sqrt[d]{2M}}.$$

Wenn zwischen zwei Enden von Fernverbindungen im Mittel viele Knoten liegen, also $b \ll a$, so kann das Grundgitter als kontinuierlich betrachtet werden.

Damit die Werte der Abstände im Kontinuumslimes gegen die Abstände der Einbettungsgeometrie konvergieren, muß $a \rightarrow 0$ und $L \rightarrow \infty$, aber mit der Einschränkung $D = aL = \text{konst.}$.

Im Grenzübergang bleibt also $D = aL$ konstant, während $L \rightarrow \infty$. Da jedoch über die verschiedenen Realisierungen zu einem festen Wert von M

gemittelt wird, ist eine gute Übereinstimmung für große M zu erwarten, da nur dann die Annahme von einer homogenen Verteilung von Fernverbindungen gerechtfertigt sein wird.

Andererseits sollen die Fernverbindungen nicht die Netzwerkstruktur und den Verknüpfungsgrad dominieren. Das bedeutet, es möge gelten $M \ll L^d$.

5.2 Eindimensionales Problem

Es stehen zwei Größen im Mittelpunkt der Argumentation: Wenn man von einem festen Knoten ausgeht, sei $m(i)$ die Zahl der Knoten, die in i Schritten erreicht werden können.⁸ $n(i)$ gibt an, wie viele Keime nach i Schritten vorliegen. Dabei ist ein Keim ein zusammenhängendes Stück, also entweder unser Ausgangsstück oder eines, das durch eine Fernverbindung zusätzlich entstanden ist. Wenn i um eins erhöht wird, wird sich $m(i)$ zu $m(i+1)$ folgendermaßen ändern:

$$m(i+1) = m(i) + \Delta m^{(i)} = m(i) + \Delta m_k^{(i)} + \Delta m_f^{(i)}$$

Dabei repräsentiert $\Delta m_k^{(i)}$ die Änderung aufgrund der an jedem Keim an beiden Seiten hinzukommenden Knoten und $\Delta m_f^{(i)}$ den Beitrag von Fernverbindungen, die zu neuen Keimen führen. Die Wahrscheinlichkeit, daß eine Lücke die Größe j besitzt, ist gegeben durch

$$p_j = \frac{\binom{L-m-j-1}{n-2}}{\binom{L-m-1}{n-1}}.$$

Im Zähler steht dabei die Anzahl der Möglichkeiten, $L-m-j$ Knoten ungeordnet in $n-1$ Lücken aufzuteilen, wobei eine Lücke mit genau j Knoten gefüllt ist. Im Nenner steht die Anzahl der Möglichkeiten, $L-m$ Knoten ungeordnet in n Lücken aufzuteilen. Daß dazu jeweils die um eins reduzierten Größen genommen worden sind, ist auf die Möglichkeit zurück zu führen, sonst $(L-m)/n$ zusätzliche Permutationen zu bilden. Dieses p_j erfüllt die Bedingungen $\sum_j p_j = 1$ und $L-m = n \sum_j j p_j$.

Lücken, die größer als 2 sind, tragen 2 zu $\Delta m_k^{(i)}$ bei, kleinere Lücken

⁸Wir weichen hier von den Bezeichnungen bei NEWMAN et al. (2000) ab, die mit m die Zahl der *nicht* erreichten Knoten bezeichnen. Entsprechend muß dann $L-m$ durch m ersetzt werden.

tragen hingegen ihre ganze Größe bei. Es ergibt sich mit $\sum p_j = 1$

$$\begin{aligned}\Delta m_k^{(i)} &= n(i) \left[p_1 + 2 \sum_{j \geq 2} p_j \right] \\ &= n(i) [p_1 + 2(1 - p_1)] \\ &= 2n(i) - p_1 n(i)\end{aligned}$$

Im Schritt zuvor wurden $\Delta m^{(i-1)}$ neue Knoten erreicht. Die Dichte an Enden von Fernverbindungen beträgt $2M/L$, also hat man $2M\Delta m^{(i-1)}/L$ Enden von Fernverbindungen erreicht, die nun, im i -ten Schritt abgelaufen werden können. Sie enden mit der Wahrscheinlichkeit $(L - m(i) - \Delta m_k^{(i)})/L$ in Lücken, die nach dem i -ten Schritt noch existieren. Man verwendet hier die Annahme $1 \ll M$, da sonst nicht von einer homogenen Verteilung der Enden von Fernverbindungen ausgegangen werden kann.

$$\Delta m_f^{(i)} = \frac{2M}{L^2} \Delta m^{(i-1)} [L - m(i) - \Delta m_k^{(i)}]. \quad (5.1)$$

Ebenso ändert sich die Anzahl der Lücken

$$\begin{aligned}n(i+1) &= n(i) + \Delta n^{(i)} \\ &= n(i) + \frac{2M}{L^2} \Delta m^{(i-1)} [L - m(i) - \Delta m_k^{(i)} - 4n(i)] - n(i)(p_1 + p_2).\end{aligned}$$

Dabei gibt der erste Term die Änderung aufgrund neuer Keime, der zweite aufgrund sich schließender Lücken wieder. Er ist um einen Term $\sim -4n(i)$ kleiner als Δm_f , da vier Plätze in jeder Lücke so am Rand liegen, daß sie keinen neuen Keim bilden, wenn sie getroffen werden.

Es soll nun abgeschätzt werden, welche Terme das Verhalten für $L \rightarrow \infty$ dominieren. Für den letzten Term in der letzten Gleichung gilt

$$\begin{aligned}p_1 + p_2 &= \frac{(n-1)!(L-m-n)!}{(L-m-1)!(n-2)!} \left[\frac{(L-m-2)!}{(L-m-n)!} + \frac{(L-m-3)!}{(L-m-n-1)!} \right] \\ &= \frac{n-1}{L-m-1} \left[1 + \frac{L-m-n}{L-m-2} \right] \\ &\approx \frac{2(n-1)}{L-m-1}.\end{aligned}$$

Und man findet

$$p_1 = \frac{n-1}{L-m-1}.$$

Von m kann in einem weiten Bereich angenommen werden, daß es proportional zu L ist ($m \propto L$), gleichzeitig ist aber auch $(L - m) \propto L$. Da $n \leq M + 1$ gilt, ist n unabhängig von L beschränkt und proportional zu M . Auch wenn M groß ist, soll stets gelten $M \ll L$, dann kann der zweite Addent von Δm_k vernachlässigt werden:

$$\begin{aligned}\Delta m_k^{(i)} &\approx 2n - \frac{n(n-1)}{L-m-1} \\ &= o(L^0) + o(L^{-1}).\end{aligned}\tag{5.2}$$

Damit dominiert der erste Term. Analog gilt

$$\begin{aligned}\Delta m_f^{(i)} &= \frac{2M}{L^2} \Delta m^{(i-1)} [L - m(i) - \Delta m_k^{(i)}] \\ &= \Delta m^{(i-1)} [o(L^{-1}) + o(L^{-1}) + o(L^{-2})].\end{aligned}$$

Daraus ist ersichtlich, daß $|\Delta m_f| \ll |\Delta m_k|$. Also wird im Grenzfall großer L gelten

$$\Delta m^{(i)} \approx \Delta m_k^{(i)} \approx 2n(i).$$

Analog argumentiert man für n

$$\begin{aligned}\Delta n^{(i)} &= \frac{2M}{L^2} \Delta m^{(i-1)} [L - m(i) - \Delta m_k^{(i)} - 4n(i)] - n(i)(p_1 + p_2) \\ &\approx \frac{2M}{L^2} \Delta m^{(i-1)} [L - m(i) - \Delta m_k^{(i)} - 4n(i)] - n(i) \frac{2(n(i)-1)}{L-m(i)-1} \\ &= o(L^{-1}) + o(L^{-1}) + o(L^{-2}) + o(L^{-2}) + o(L^{-1}).\end{aligned}$$

Die ersten beiden Terme und der letzte Term bestimmen das Verhalten.

$$\begin{aligned}\Delta m &\approx 2n \\ \Delta n &\approx 4n(L-m) \frac{M}{L^2} - 2 \frac{n(n-1)}{L-m}\end{aligned}$$

in Übereinstimmung mit NEWMAN et al. (2000). Nach Übergang zu Differentialgleichungen lauten die Gleichungen

$$\frac{dm}{di} = 2n\tag{5.3}$$

$$\frac{dn}{di} = 4n(L-m) \frac{M}{L^2} - 2 \frac{n(n-1)}{L-m}.\tag{5.4}$$

Es wurde bereits festgestellt, daß $m \propto L$ und $i \propto L$. Man setzt daher $\tilde{m} := m/L$ und $r := i/L$, dies bedeutet, daß \tilde{m} den Anteil der noch nicht

erreichten Knoten an der Gesamtzahl angibt und der Ableitung der Oberfläche entspricht, die durch den Minimalabstand r von einem festen Punkt definiert wird. Gleichzeitig kann die Ableitung von \tilde{m} als Verteilung des Minimalabstandes interpretiert werden. Es stellt r im Grenzfall die euklidische Distanz auf dem Kreisbogen dar. Damit gilt

$$\begin{aligned}\frac{d\tilde{m}}{dr} &= 2n \\ \frac{dn}{dr} &= 4Mn(1 - \tilde{m}) - 2\frac{n(n-1)}{1 - \tilde{m}}.\end{aligned}$$

Man kann nun die Variable r eliminieren, indem man das Verhältnis der beiden Gleichungen bildet

$$\frac{dn}{d\tilde{m}} = 2M(1 - \tilde{m}) - \frac{n-1}{1 - \tilde{m}}.$$

Die Lösung davon ist mit $c \in \mathbb{R}$ als Integrationskonstante

$$n = -2M(1 - \tilde{m})^2 + c(1 - \tilde{m}) + 1.$$

Aus den Randbedingungen $\tilde{m}(0) = 0$ und $n(0) = 1$ folgt $c = 2M$. Setzt man dieses Ergebnis in die Gleichung für \tilde{m} ein, so erhält man

$$\frac{d\tilde{m}}{dr} = 4M(1 - \tilde{m})\tilde{m} + 2$$

bzw.

$$\begin{aligned}r &= \frac{1}{4M} \int_0^{\tilde{m}} \frac{dm}{m^2 - m - 1/2M} \\ &= \frac{1}{2M\sqrt{1 + 2/M}} \left(C + \operatorname{atanh} \frac{2\tilde{m} - 1}{\sqrt{1 + 2/M}} \right)\end{aligned}$$

mit

$$C = \operatorname{atanh} \frac{1}{\sqrt{1 + 2/M}}.$$

Dann ist

$$\tilde{m}(r) = \frac{\sqrt{1 + 2/M}}{2} \tanh(2M\sqrt{1 + 2/M}r - C) + \frac{1}{2}. \quad (5.5)$$

Es ergibt sich nun die charakteristische Weglänge als

$$\begin{aligned}\ell &= \int_0^1 r \frac{d\tilde{m}}{dr} dr \\ &= \int_0^1 r d\tilde{m} \\ &= \frac{1}{4M\sqrt{1+2/M}} \operatorname{atanh} \frac{1}{\sqrt{1+2/M}}.\end{aligned}$$

Diese Näherung gilt für $1 \ll M \ll L$, wie aus den Schritten in Gleichung (5.1) und (5.2) hervorgeht (vgl. Abb. 5.3). Bei NEWMAN et al. (2000) wird gezeigt, daß auch der Grenzfall $M \ll 1$ zulässig ist – eine Situation, die zu verstehen ist, wenn M nicht als Zahl der Fernverbindungen sondern als gekoppelt mit einer Wahrscheinlichkeit $\phi = M/2L$ betrachtet wird.

5.3 Mehrdimensionales Problem*

Nun gehe man von einem d -dimensionalen, hyperkubischen Gitter aus. Es bestehe aus L^d Knoten mit periodischen Randbedingungen (Torus). Jeder Knoten ist mit seinen $2d$ nächsten Nachbarn (oben, unten, links und rechts, vorne, hinten etc.) verbunden, d. h. $l = 1$. Zusätzlich gebe es M zufällig verteilte Fernverbindungen. Wie vorhin betrachte man die Größe $m(i)$, die angibt, wie viele der L^d Knoten im Minimalabstand i erreichbar sind. Die im i -ten Schritt neu hinzukommenden Knoten $\Delta m(i) = m(i) - m(i-1)$ bezeichnet man auch als Oberfläche.

Es teilt sich die Oberfläche wieder in zwei Anteile

$$\Delta m(i) = \Delta m_k(i) + \Delta m_f(i),$$

wobei Δm_k das reguläre Wachstum an den schon vorhandenen Keimen erfaßt, während Δm_f die neuen Keime bezeichnet. Im Fall des regulären d -dimensionalen, hyperkubischen Gitters ohne Fernverbindungen ergibt sich

die Oberfläche einer „Kugel“⁹ mit Radius $i < L/2$ zu

$$a(i) = \frac{2^d i^{d-1}}{(d-1)!} + o(|i^{d-3}|)$$

($0 < i < L/2$, da es sonst wegen der endlichen Größe des Gitters zu Überschneidungen kommt, die hier nicht berücksichtigt werden sollen).

d	$a_d(i)$
1	2
2	$4i$
3	$4i^2 + 2$
4	$8i^3/3 + 16i/3$
5	$4i^4/3 + 20i^2/3 + 2$

Tabelle 5.1: Die Oberflächen einer „Kugel“ mit Radius $i \geq 1$ auf dem d -dimensionalen (hyper-) kubischen Gitter.

Das Wachstum eines Keims, der bereits $j-1$ Schritte gewachsen ist, ergibt sich ohne Überschneidungen mit anderen Keimen zu $a(j)$; in diesem Fall gilt

$$\begin{aligned} \Delta m_k(i) &= \sum_{j=2}^{i-1} a(j-1) \Delta m_f(i-j+1) + a(i-1) \\ \Delta m_f(i) &= \frac{2M}{L^{2d}} \Delta m(i-1) [L^d - m(i) - \Delta m_k(i)]. \end{aligned} \quad (5.7)$$

Wenn man wie hier den Überschneidungsterm vernachlässigt, so sollte die Approximation wenigstens für kleine i das richtige Verhalten haben, da in diesem Bereich noch keine Überschneidungen vorliegen.

Die vorliegenden Terme behandeln das Problem so, daß ein Knoten, der mittels Fernverbindung auf zwei oder mehr Wegen erreicht werden kann, zwei mal oder noch öfter gezählt wird. Richtig wäre es jedoch, jeden Knoten nur ein einziges Mal zu berücksichtigen. Deswegen fragt man, wie groß die Wahrscheinlichkeit ist, daß ein Knoten, der neu hinzukommt, noch nicht auf

⁹In der Mathematik wird der Begriff der Kugel im Zusammenhang mit einer festen Metrik $d(.,.)$ im Raum R folgendermaßen definiert:

$$\mathbb{B}_\varepsilon(x) := \{y \in R \mid d(x, y) \leq \varepsilon\}. \quad (5.6)$$

Diese \mathbb{B} werden als Kugeln bezeichnet. Für die euklidische Metrik bilden die \mathbb{B} Kugeln im herkömmlichen Sinne. Die hier gebrauchte Manhattan-Distanz, die mathematisch einer Eins-Norm entspricht, bildet \mathbb{B} in Form von Polyedern.

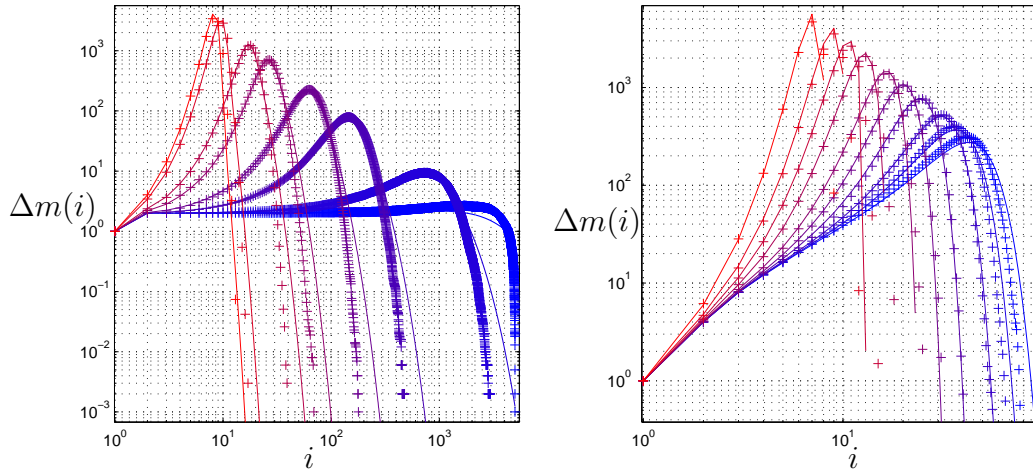


Abbildung 5.1: Small-World-Modell (Typ C, $l = 1$). **Links:** eindimensionales Modell mit $L = 10000$ und $M = 1, 10, 100, 300, 1000, 2000, 7000, 10000$ von blau nach rot (1000 Stichproben). **Rechts:** zweidimensionales Modell mit $L = 100$ und $M = 10, 20, 40, 100, 200, 400, 1000, 2000, 4000, 10000$ von blau nach rot (100 Stichproben). Oberfläche als Funktion der Schrittzahl. Kreuzchen stehen für die Ergebnisse der Simulation; durchgezogene Kurven, die sich aus den Iterationsgleichungen (Gl. 5.8 und 5.7) ergeben.

anderem Wege erreicht wurde. Diese Wahrscheinlichkeit ist $(L^d - m(i))/L^d$: Für eine ausreichende Anzahl von langreichweitigen Verbindungen $M \gg 1$ mitteln sich die Differenzen, die durch unterschiedliche Form und Anordnung der neuen Keime hervorgerufen werden, heraus. Die Wahrscheinlichkeit des Überlapps ist dann nur noch vom zur Verfügung stehenden Platz bestimmt. Dies muß auf den ohne Überlappterm als zur Verfügung stehend angenommenen Platz bezogen werden; damit ergibt sich der Faktor $(L^d - m)/L^d$.

$$\Delta m_k(i) = \frac{L^d - m(i)}{L^d} \left(\sum_{j=2}^{i-1} a(j-1) \Delta m_f(i-j+1) + a(i-1) \right) \quad (5.8)$$

Dieser Zusammenhang wurde in numerischen Simulationen für $d = 1, 2$ bestätigt (Abb. 5.1). Es ergibt sich in beiden Fällen eine Übereinstimmung in einem weiten Bereich von eingefügten Fernverbindungen, der durch $1 \ll M \leq L^d$ charakterisiert werden kann.

Es wurde von MOUKARZEL und ARGOLLO DE MENEZES (1999) darauf hingewiesen, daß das Small-World-Phänomen im d -dimensionalen Gitter nicht von der mittleren Distanz zwischen zwei Enden von Fernverbindungen abhängt, die bei einer Dichte von Enden von Fernverbindungen ρ durch

$$d_L = \rho^{-1/d}$$

gegeben ist. Hier wird jedoch ein anderer Blickpunkt eingenommen, weil M als konstant angenommen wird, was für $L \rightarrow \infty$ ein gegen Null konvergierendes ρ verursacht. Die Abstände in der Einbettungsgeometrie sollen beim Grenzübergang endlich bleiben, es wird also nochmal durch L geteilt.

$$d_\infty = \lim_{L \rightarrow \infty} \frac{d_L}{L} = \frac{1}{(2M)^{1/2}}.$$

Die von MOUKARZEL und ARGOLLO DE MENEZES (1999) angegebene charakteristische Länge ξ_L muß ebenfalls auf die Einbettungsgeometrie bezogen werden und ergibt sich dann zu

$$\xi_\infty = \lim_{L \rightarrow \infty} \frac{\xi_L}{L} = \frac{\ln(8M)}{\sqrt{8M}}$$

und ist somit nur von M bestimmt. Diese Länge gibt an, bei welchem Gitterabstand der minimale Abstand als echt kleiner als der Gitterabstand angenommen werden kann.

Nun soll der Übergang zu einem Kontinuumslimites vollzogen werden. Dies ist gerechtfertigt, weil die Δm für verschiedene L mit festem M ein gemeinsames Verhalten zeigen (s. Abb. 5.2).

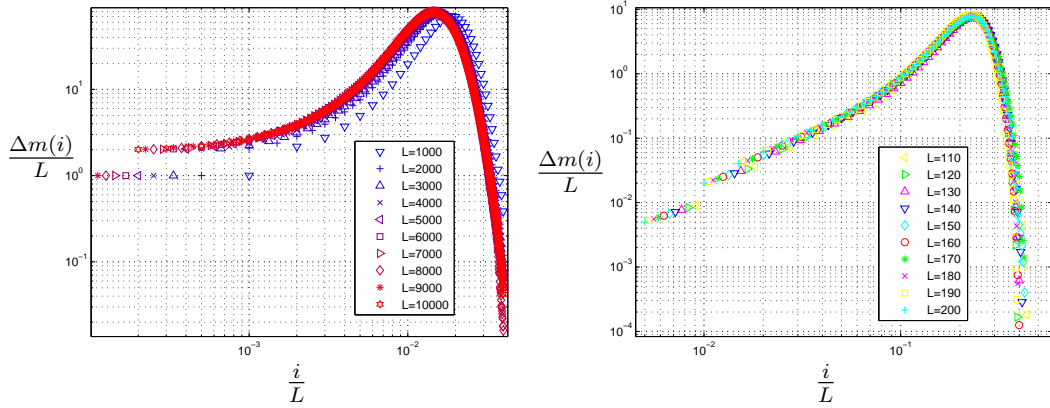


Abbildung 5.2: Small-World-Modell (Typ C, $l = 1$) $\Delta m(i)/L$ über i/L für verschiedene Gitter mit $M = 100$ Fernverbindungen: Wie erwartet ergibt sich in allen Fällen eine gemeinsame Grundkurve. **Links:** Eindimensionales Modell mit 1000 Stichproben. **Rechts:** Zweidimensionales Modell mit 50 Stichproben.

Dazu geht man wie im eindimensionalen Fall zur Variablen $x := i/L$ über und untersucht $\tilde{m} := m/L^d$ (ebenso für \tilde{m}_k und \tilde{m}_f) mit M konstant. Es geht $a(i)$ in $\tilde{a}(x) = 2^d x^{d-1}/(d-1)!$ über. Unter Auslassung verschwindender

Terme findet man:

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}\tilde{m}_k &= (1 - \tilde{m}) \left(\int_0^x \tilde{a}(x') L^d \frac{d}{dx} \tilde{m}_f(x - x') dx' + \tilde{a}(x) \right) \\ &= (1 - \tilde{m}) \left(\int_0^x \tilde{a}(x - x') L^d \frac{d}{dx} \tilde{m}_f(x') dx' + \tilde{a}(x) \right) \\ \frac{d}{dx}\tilde{m}_f &= \frac{2M}{L^d} (1 - \tilde{m}(x)) \frac{d}{dx} \tilde{m}(x)\end{aligned}$$

Dabei sieht man, daß

$$\frac{d}{dx}\tilde{m}_k \gg \frac{d}{dx}\tilde{m}_f.$$

Also ergibt sich für \tilde{m} die Gleichung

$$\frac{d}{dx}\tilde{m} = (1 - \tilde{m}) \left(\int_0^x \tilde{a}(x - x') 2M(1 - \tilde{m})(x') \frac{d}{dx} \tilde{m}(x') dx' - \tilde{a}(x) \right)$$

mit der Anfangsbedingung

$$\tilde{m}(0) = 0.$$

In einer Dimension ist der Ansatz exakt lösbar

$$\tilde{m}(r) = 1 - \sqrt{\frac{M + 1}{M + e^{4(M+1)r}}}, \quad (5.9)$$

allerdings zeigt sich, daß er den selben Gültigkeitsbereich hat, wie der bereits im vorangehenden Absatz vorgestellte (Gl. 5.5, vgl. Abb. 5.3).

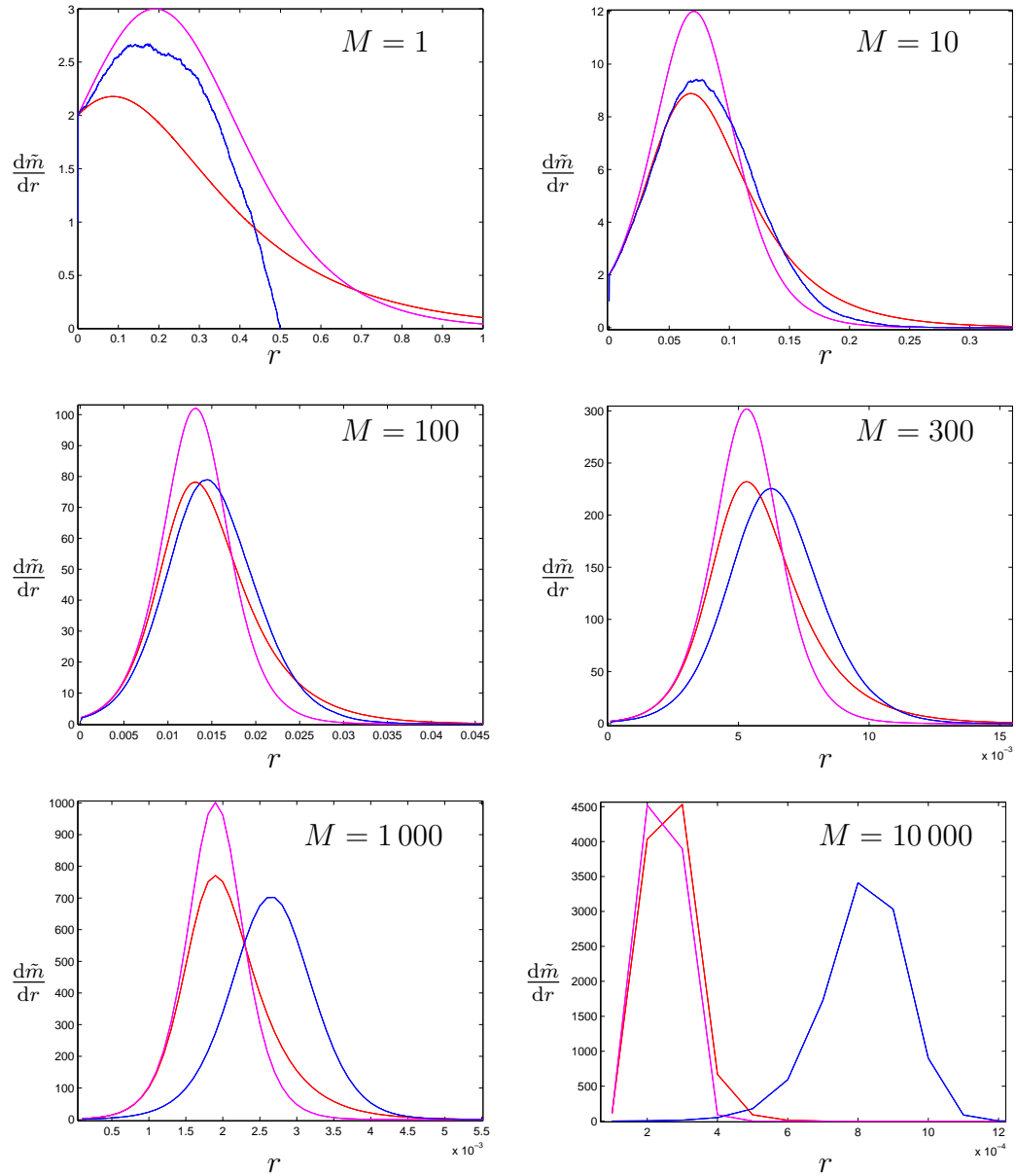


Abbildung 5.3: Eindimensionaler Small-World-Graph im Kontinuumslimes. Vergleich von $\frac{d\tilde{m}}{dr}$ über r aus Gleichung (5.5) in magenta (dies ist in diesem Falle gleichzeitig der Verlauf von $n(r)$), aus Gleichung (5.9) in rot und Ergebnissen einer Simulation (blau) für verschiedene M und in einem Netzwerk mit $L = 10000$ vom Typ C ($l = 1$, 1000 Stichproben). Der hier vorgestellte Ansatz bildet in diesem Bereich das Verhalten genauer ab, als die Molekularfeldnäherung (Gl. 5.5).

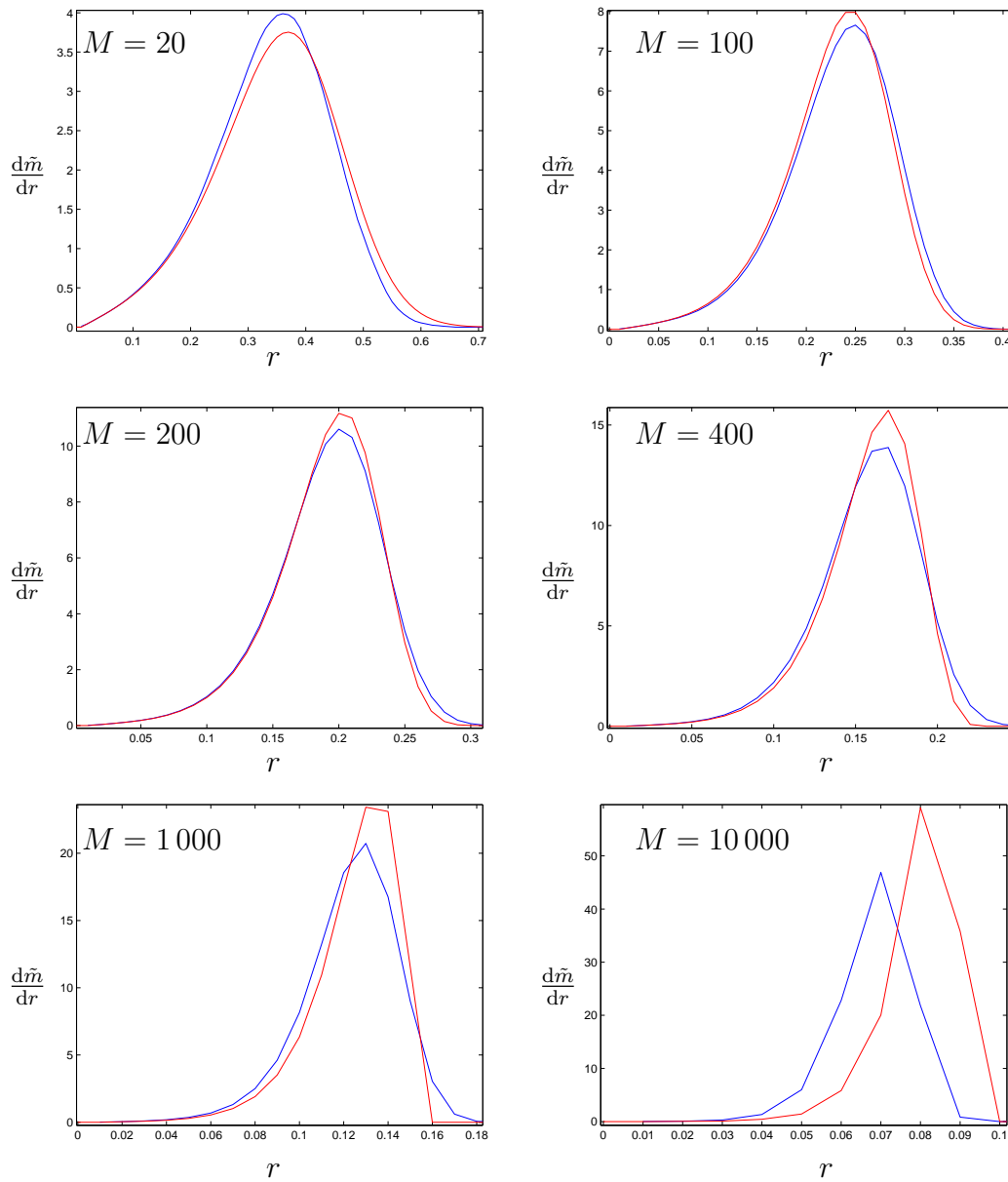


Abbildung 5.4: Zweidimensionaler Small-World-Graph im Kontinuumslimes. Vergleich von $\frac{d\bar{m}}{dr}$ über r aus Gleichung (5.10) in rot und Ergebnissen einer Simulation (blau) für verschiedene M und in einem Netzwerk mit $L = 100$ vom Typ C ($l = 1$): Für $M \leq 1000$ sind die Näherungen gut.

Es soll nun für den Fall $d = 2$ weitergerechnet werden, da zu diesem numerische Ergebnisse des Autors vorliegen.

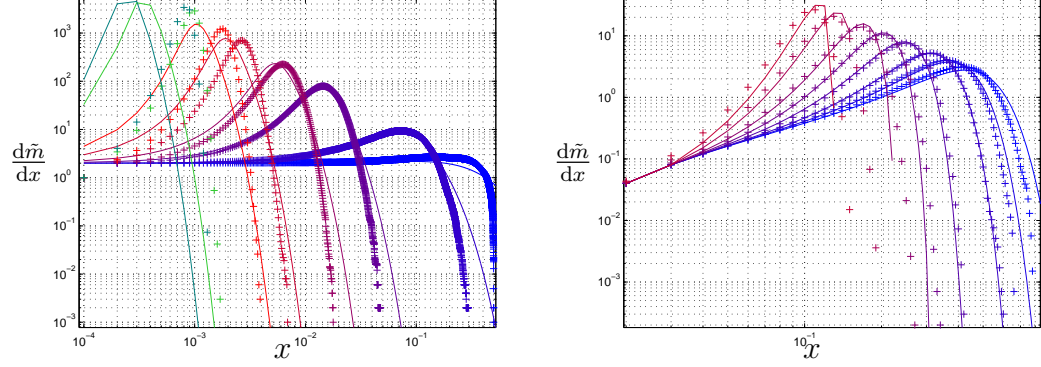


Abbildung 5.5: Small-World-Modell (Typ C, $l = 1$). **Links:** Eindimensional mit $L = 10\,000$ und $M = 1, 10, 100, 300, 1\,000, 2\,000$ von blau nach rot, sowie $M = 7\,000$ in hellgrün und $M = 10\,000$ in dunkelgrün (1000 Stichproben). **Rechts:** Zweidimensional mit $L = 100$ und $M = 10, 20, 40, 100, 200, 400, 1\,000, 2\,000, 4\,000, 10\,000$ von blau nach rot (100 Stichproben): Im eindimensionalen Fall ist ein Kontinuumsmodell bis zu einer Zahl von Fernverbindungen, die 1% der Knotenzahl entspricht, zulässig; im zweidimensionalen Fall ist bis ca. 10% eine gute Übereinstimmung erkennbar.

Man erhält¹⁰

$$\begin{aligned}
 \frac{d}{dx} \tilde{m} &= 4(1 - \tilde{m}) \left(2M \int_0^x (x - x')(1 - \tilde{m}) \frac{d\tilde{m}}{dx} dx' + x \right) \\
 &= 4(1 - \tilde{m}) \left(x + 2M \int_0^x \tilde{m} dx' - M \int_0^x \tilde{m}^2 dx' \right) \\
 &= 4(1 - \tilde{m}) \left(x + M \left[x - \int_0^x (1 - \tilde{m})^2 dx' \right] \right) \quad (5.10)
 \end{aligned}$$

Mit der Anfangsbedingung $\tilde{m}(0) = 0$ ist ersichtlich, daß $d\tilde{m}(0)/dx = 0$. Für kleine $x = \varepsilon$ ist folglich $\tilde{m}(\varepsilon) \approx 0$ und damit $\int_0^x (1 - \tilde{m})^2 \approx x$, was wiederum $d\tilde{m}(\varepsilon)/dx \approx 4\varepsilon > 0$ zur Folge hat. Da nun $0 < (1 - \tilde{m})^2 < 1$ ist

$$0 < \int_0^x (1 - \tilde{m})^2 dx' < x.$$

¹⁰Über partielle Integration rechnet man nach, daß

$$\begin{aligned}
 \int_a^b f f' dx &= \frac{1}{2} f^2(x) \Big|_a^b \\
 \int_a^b x f f' dx &= \frac{1}{2} \left(x f^2(x) \Big|_a^b - \int_a^b f^2 dx \right).
 \end{aligned}$$

Man schließt daraus, daß

$$\frac{d}{dx}\tilde{m} \geq 0$$

solange $\tilde{m} < 1$. Da aber $\tilde{m} > 1$ sofort zu einem Vorzeichenwechsel der Ableitung führte, bleibt $\tilde{m} \leq 1$.

Es ist nun die Verteilung der Minimalabstände gegeben durch

$$P(x) = \frac{d\tilde{m}}{dx}.$$

Näherung für unendlich große Systeme

Für unendlich große Netzwerke hat MOUKARZEL (1999) bereits einen analytischen Ausdruck für die Verteilung der Abstände bei Small-World-Netzwerken beliebiger Dimension angegeben. Er hat dabei jede Form von Überschneidungen der Keime vernachlässigt (da es ja unendlich viel Platz gibt) und folglich auch nicht den Fall berücksichtigt, daß eine Fernverbindung zu einem bereits erreichten Knoten führt. Auf den hier diskutierten Ansatz bezogen ist dies der Grenzfall kleiner Zahlen von Fernverbindungen M und kleiner Distanzen x .

In der bisherigen Argumentation und Notation erhalte man bei völliger Vernachlässigung von Überlappstermen folgende Ausdrücke

$$\begin{aligned} \Delta m_k(i) &= 4 \sum_{j=2}^i j \Delta m_f(i-j+1) + 4(i-1) \\ \Delta m_f(i) &= \frac{2M}{L^2} \Delta m(i-1). \end{aligned}$$

Wenn hier ebenfalls mit L^2 zu $\tilde{m} = m/L^2$ normalisiert und die Variable x verwendet wird, so erhält man

$$\frac{d\tilde{m}}{dx} = 8M \int_0^x y \frac{\partial \tilde{m}(x-y)}{\partial x} dy + 4x. \quad (5.11)$$

MOUKARZEL (1999) argumentiert bei der Berechnung des im i -ten Schritt bedeckten Volumens $m(i)$ folgendermaßen. Es ist die Oberfläche eines einzigen Keimes nach der Zeit i , die als kontinuierlich betrachtet wird, gleich $a_d(1)i^{d-1}$ und dieser Primärkeim nimmt das Volumen $a_d(1) \int_0^i j^{d-1} dj$ ein. Zusätzlich entstehen neue Keime mit der Wahrscheinlichkeit $2Ma_d(1)i^{d-1}/L^2$ und tragen zum Volumen, falls sie zum Zeitpunkt j entstanden, $m(i-j)$ bei. Damit ergibt sich also die selbstkonsistente Gleichung

$$m(i) = \Gamma_d \int_0^i j^{d-1} \left[1 + \frac{2M}{L^2} m(i-j) \right] dj.$$

Im bislang behandelten Fall ist $d = 2$ und $a_2(1) = 4$. Es soll wie oben mit $\tilde{m} = m/L^2$ und $x = i/L$ weitergerechnet werden. Dies führt zu

$$\tilde{m}(x) = 4 \int_0^x y (1 + 2M\tilde{m}(x-y)) dy.$$

Einmaliges Differenzieren dieser Gleichung führt mit der Randbedingung $\tilde{m}(0) = 0$ auf Gleichung (5.11).

5.4 Allgemeiner Skalenansatz*

Nun soll die Skalierung der Variablen M mit einbezogen werden. Es wird deswegen $t = M^{1/d}i/L$ gesetzt. Wiederum ist $\tilde{m} := m/L^d$ (ebenso für \tilde{m}_k und \tilde{m}_f) und $\tilde{n} := n/M$. Es geht $a(i)$ in $\tilde{a}(x) = c_d t^{d-1}$ über mit $c_d := 2^d/(d-1)!$, also $\tilde{a}(t) = M^{(d-1)/d} L^{-d+1} a(i)$. Man findet unter Auslassung von Termen $o(L^{-1})$ und $o(ML^{-d})$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \tilde{m}_k &= (1 - \tilde{m}) \left(\frac{\tilde{a}(t)}{M} + \int_0^t \tilde{a}(t') \frac{L^d}{M} \frac{d}{dt} \tilde{m}_f(t-t') dt' \right) \\ \frac{d}{dt} \tilde{m}_f &= \frac{2M}{L^d} (1 - \tilde{m}(t)) \frac{d}{dt} \tilde{m}(t). \end{aligned}$$

Dabei sieht man, daß

$$\frac{d}{dt} \tilde{m}_k \gg \frac{d}{dt} \tilde{m}_f.$$

Also ergibt sich für \tilde{m} die Gleichung

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \tilde{m} &= (1 - \tilde{m}) \left(\frac{\tilde{a}(t)}{M} + 2 \int_0^t \tilde{a}(\tau) (1 - \tilde{m}(t-\tau)) \frac{d}{dt} \tilde{m}(t-\tau) d\tau \right) \\ &= c_d (1 - \tilde{m}) \left(\frac{t^{d-1}}{M} + 2 \int_0^t (t-\tau)^{d-1} (1 - \tilde{m}(\tau)) \frac{d}{dt} \tilde{m}(\tau) d\tau \right) \end{aligned} \quad (5.12)$$

mit der Anfangsbedingung $\tilde{m}(0) = 0$. Im Bereich um $t = 0$ dominiert der erste Term. Der Punkt t^* sei derart definiert, daß hier die Größe der beiden Terme gleich sei. Man nehme an, daß in diesem Bereich noch $\tilde{m}(t^*) \ll 1$ gelte. Dann ist folgende Näherung zulässig

$$\begin{aligned} t < t^* : & \quad \frac{d}{dt} \tilde{m}(t) = c_d \frac{t^{d-1}}{M} \\ t^* < t \quad \tilde{m}(t) \ll 1 : & \quad \frac{d}{dt} \tilde{m}(t) = 2c_d \int_0^t (t-\tau)^{d-1} \frac{d\tilde{m}}{dt} d\tau. \end{aligned}$$

Die zweite Gleichung kann durch $d - 1$ -maliges Ableiten nach t auf folgende Form gebracht werden

$$\frac{d^d}{dt^d} \tilde{m}(t) = 2c_d(d-1)! \tilde{m}(t) = 2^{d+1} \tilde{m}(t). \quad (5.13)$$

Daraus folgen die Lösungen

$$\begin{aligned} t < t^* : \quad \tilde{m}(t) &= c_d \frac{t^d}{dM} \\ t^* < t \quad \tilde{m}(t) \ll 1 : \quad \tilde{m}(t) &= e^{\gamma(t-t_0)}. \end{aligned}$$

mit $\gamma = 2^{\frac{d+1}{d}}$ und t_0 als Integrationskonstante. Die Exponentialfunktion wächst schneller als die Potenz im ersten Ausdruck. Andererseits ist der erste Ausdruck für $t = 0$ ebenfalls Null, die Exponentialfunktion ist aber größer Null. Dies ermöglicht es, die beiden Ausdrücke so aneinander anzuschließen, daß ein stetiger Verlauf entsteht, der zudem eine stetige Ableitung besitzt (ENGL. matching). Diese Bedingung liefert die Gleichungen

$$\begin{aligned} e^{\gamma(t^*-t_0)} &\stackrel{!}{=} c_d \frac{t^{*d}}{dM} \\ \gamma e^{\gamma(t^*-t_0)} &\stackrel{!}{=} c_d \frac{t^{*(d-1)}}{M}. \end{aligned} \quad (5.14)$$

Daraus ergeben sich die Ausdrücke

$$t^* = \frac{d}{\gamma} \quad (5.15)$$

$$t_0 = t^* - t^* \ln t^* - \frac{1}{\gamma} \ln \frac{c_d}{dM}. \quad (5.16)$$

Um dieses Ergebnis zu erreichen wurden Terme der Ordnungen $o(L^{-1})$, $o(M^{-1})$ und $o(ML^{-d})$ ausgelassen. Dieses Vorgehen ist nur zulässig, wenn

$$1 \ll M^{1/d} \ll L \quad (5.17)$$

gilt. Dies deckt sich mit dem Gültigkeitsbereich der Näherung für $d = 1$ von NEWMAN et al. (2000), wie sie oben (S. 41) dargestellt wurde.

Für $d = 1$ ist $c_d = 2$ und $\gamma = 4$. Dann ist $t^* = 1/4$ und

$$\begin{aligned} t_0 &= \frac{1}{4} + \frac{1}{4} \ln 4 + \frac{1}{4} \ln \frac{M}{2} \\ &= \frac{1}{4} + \frac{1}{4} \ln 2M. \end{aligned} \quad (5.18)$$

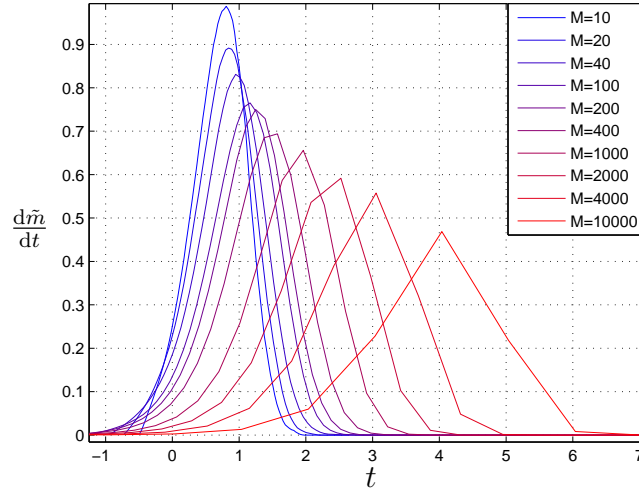


Abbildung 5.6: Small-World-Modell (Typ C, $l = 1$, $d = 2$): Ergebnisse einer Simulation mit verschiedenen Werten von M . Diese wurden jeweils um t_0 gemäß Gleichung (5.16) verschoben. Dabei wird deutlich, daß von den hier verwendeten M -Werten nur wenige die Bedingung (5.17) erfüllen.

Der Fall $d = 1$ kann auch in geschlossener Form gelöst werden. Gleichung (5.12) lautet

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \tilde{m} &= 4(1 - \tilde{m}) \int_0^t (1 - \tilde{m}) \frac{d}{dt} \tilde{m} d\tau \\ &= 4(1 - \tilde{m}) \int_{\tilde{m}(0)}^{\tilde{m}(t)} (1 - \tilde{m}) d\tilde{m} \\ &= 4(1 - \tilde{m}) \left(\tilde{m} - \frac{\tilde{m}^2}{2} \right), \end{aligned}$$

wobei Terme der Ordnung $o(M^{-1})$ ausgelassen wurden. Die Lösung lautet

$$\tilde{m}(t) = 1 - \left(e^{4(t-t_0)} + 1 \right)^{-\frac{1}{2}} \quad (5.19)$$

Da Terme der Ordnung $o(M^{-1})$ nicht berücksichtigt wurden, ist diese Lösung nur für $t > t^*$ sinnvoll und muß bei $t^* = 1/4$ an die Lösung für $t < t^*$ angeschlossen werden. Diese lautet

$$t < t^* : \quad \tilde{m}(t) = \frac{2t}{M}.$$

Falls $t^* - t_0 < 0$ kann die Ableitung von \tilde{m} aus Gleichung (5.19) durch ihren asymptotischen Verlauf angenähert werden, so daß sich für das Anpassen

folgende Gleichung ergibt

$$\frac{2}{M} \stackrel{!}{=} 2e^{4(t^*-t_0)}.$$

Also muß die Integrationskonstante den Wert

$$t_0 = t^* + \frac{1}{4} \ln M$$

haben. Daran sieht man bereits, daß die Bedingung $t^* - t_0 < 0$ erfüllt ist. (Der Unterschied zum Ergebnis aus Gleichung (5.18) rührt daher, daß sich der asymptotische Wert der Ableitung um einen Faktor 2 vom Verlauf, der in Gleichung (5.14) angenommen wurde, unterscheidet.) Um auch t_0 zu berechnen, verwendet man eine Anschlußbedingung für \tilde{m}

$$\begin{aligned} \frac{2t^*}{M} &\stackrel{!}{=} 1 - (1 + e^{4(t^*-t_0)})^{-\frac{1}{2}} \\ &= (1 + 1/M)^{-\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

Damit folgt unter Verwendung von $(1 + \varepsilon)^{-1/2} \approx 1 - \varepsilon/2 + o(\varepsilon^{-2})$, was $M \gg 1$ voraussetzt,

$$\begin{aligned} t^* &= \frac{M}{2} \left(1 - (1 + 1/M)^{-\frac{1}{2}} \right) \\ &\approx \frac{1}{4}. \end{aligned}$$

Hinsichtlich der Skalierung nach M soll nun nochmals der Ansatz von NEWMAN et al. (2000) untersucht werden. Man setzt nun – mit $d = 1!$ – $t = iM/L$ und $\tilde{n} = n/M$. Es ergibt sich mit dieser Bezeichnung ausgehend von den Gleichungen (5.3) und (5.4) auf Seite 43

$$\begin{aligned} \frac{d\tilde{m}}{dt} &= 2\tilde{n} \\ \frac{d\tilde{n}}{dt} &= 4(1 - \tilde{m})\tilde{n} - \frac{2\tilde{n}(\tilde{n} - 1/M)}{1 - \tilde{m}}. \end{aligned}$$

Unter Vernachlässigung der Terme $o(M^{-1})$ folgt

$$\begin{aligned} \frac{d\tilde{m}}{dt} &= 2\tilde{n} \\ \frac{d\tilde{n}}{dt} &= 4(1 - \tilde{m})\tilde{n} - \frac{2\tilde{n}^2}{1 - \tilde{m}}. \end{aligned}$$

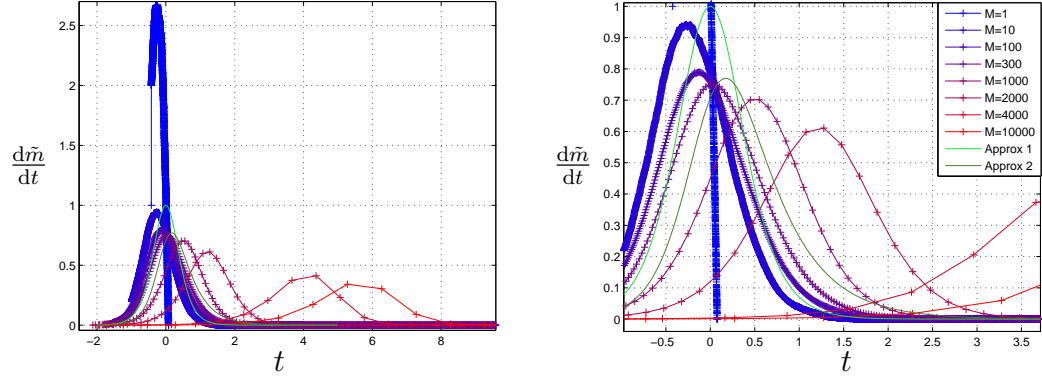


Abbildung 5.7: Small-World-Modell (Typ C, $l = 1$, $d = 1$). Von blau nach rot sind Daten aus einer Simulation zu sehen, die nach t umskaliert und um t_0 gemäß Gleichung (5.16) verschoben wurden. In grün sind die beiden analytischen Ausdrücke zu sehen: *Approx 1* entspricht $2\tilde{n} = d\tilde{m}/dt$ gemäß Gleichung (5.20), *Approx 2* zeigt die Ableitung von \tilde{m} nach Gleichung (5.19), wobei in beiden Näherungen t_0 gleich Null gesetzt wurde, da es durch die Verschiebung der Simulationsdaten bereits berücksichtigt wird. **Links:** Globale Ansicht. **Rechts:** Detail. Es ist zu erkennen, daß $M = 100, 300, 1000$ im von der Bedingung (5.17) angegebenen Bereich liegen.

Diese können nach dem gleichen Verfahren wie oben gelöst werden. Wieder bildet man den Quotienten der beiden Gleichungen

$$\frac{d\tilde{n}}{d\tilde{m}} = 2(1 - \tilde{m}) - \frac{\tilde{n}}{1 - \tilde{m}},$$

dessen Lösung durch

$$\tilde{n}(t) = -2(1 - \tilde{m})^2 + c(1 - \tilde{m})$$

gegeben ist. Die Randbedingungen lauten $\tilde{m}(0) = 0 + o(M^{-1})$ und $\tilde{n}(0) = 0 + o(M^{-1})$, so daß sich $c = 2$ ergibt. Also folgt

$$\frac{d\tilde{m}}{dt} = 4(1 - \tilde{m})\tilde{m}$$

mit der Lösung

$$\begin{aligned} \tilde{m}(t) &= \frac{1}{1 + e^{-4(t-t_0)}} \\ \tilde{n}(t) &= \frac{2}{(1 + e^{4(t-t_0)})(1 + e^{-4(t-t_0)})}. \end{aligned} \quad (5.20)$$

Wiederum soll dieses \tilde{m} so angepaßt werden, daß es bei t^* an $2t^*/M$ anschließt und daß $\tilde{n}(t^*) = 1/M$. Dabei setzt man wiederum $t^* - t_0 < 0$ voraus, um

zum asymptotischen Verlauf übergehen zu können.

$$\begin{aligned}\tilde{n}(t^*) &\approx 2e^{-4(t^*-t_0)} \stackrel{!}{=} \frac{1}{M} \\ t_0 &= t^* + \frac{1}{4} \ln(2M).\end{aligned}$$

Setzt man dieses Ergebnis in die Anschlußbedingung für \tilde{m} ein, so folgt

$$\begin{aligned}\frac{2t^*}{M} &= (1 + e^{-4(t^*-t_0)})^{-\frac{1}{2}} \\ &= \frac{1}{1 + 2M} \\ t^* &\approx \frac{1}{4}\end{aligned}$$

in Übereinstimmung mit den Ergebnissen für den allgemeinen Fall (Gl. 5.15 u. 5.16), falls $M \gg 1$.

5.5 Small-World-Modell: Zusammenhang von Gitterabstand und Minimalabstand*

Die Verteilung der Minimalabstände gibt nur einen Teil der Information über das Netzwerkverhalten wieder. Eine weitere Frage ist: Wie ist die Verteilung des Minimalabstandes für zwei Knoten mit bekanntem Gitterabstand?

Ohne Einschränkung sei $l = 1$ und L ungerade, also $L = 2N + 1$ und die Größe des d -dimensionalen Gitters ist L^d mit periodischen Randbedingungen. Man mache sich klar, daß der maximale Abstand zweier Knoten in einem solchen Gitter gleich dN ist. Nun betrachte man die Wahrscheinlichkeit, daß zwei Knoten den minimalen Abstand s besitzen unter der Bedingung, daß sie im Gitterabstand n zueinander liegen; diese Wahrscheinlichkeit wird mit $P(s < n|n)$ bezeichnet. Falls $s > n$, ist diese Wahrscheinlichkeit gleich Null. Wenn $n < s$, so wurde wenigstens eine Fernverbindung benutzt. Da diese völlig zufällig verteilt sind, kann $P(s|n)$ nicht von der Position der Knoten zueinander abhängen. Dies bedeutet, daß die Wahrscheinlichkeit unabhängig von n sein muß:

$$P(s < n|n) = A(s). \quad (5.21)$$

Diese Annahme wurde in numerischen Simulationen für das zweidimensionale Small-World-Modell (Typ C) bestätigt (s. Abb. 5.8). Für das eindimensionale Modell finden sich numerische Ergebnisse in MOUKARZEL (1999).

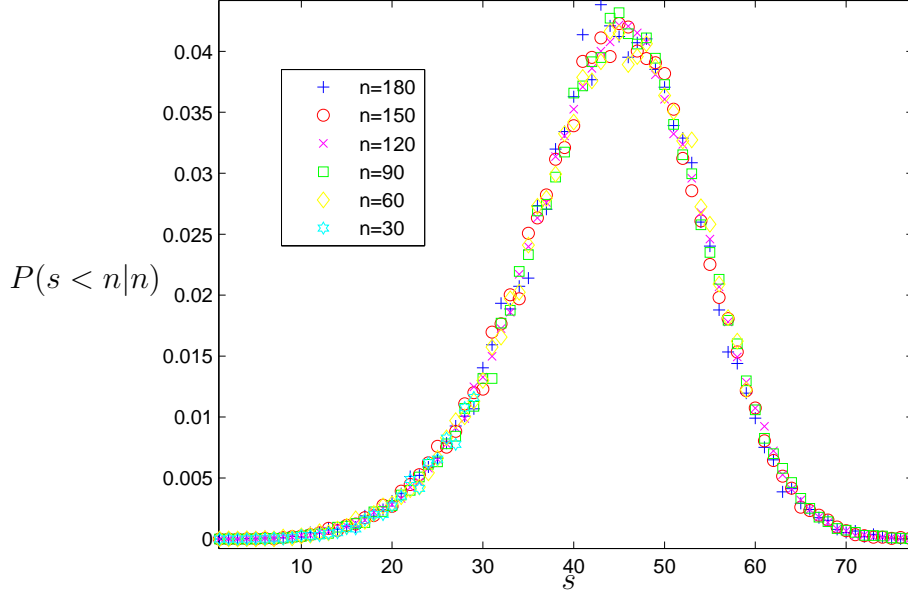


Abbildung 5.8: Zweidimensionaler Small-World-Graph: Zusammenfall von $P(s < n|n)$ über s für verschiedene Werte von n . Gitter mit 201^2 Knoten und 100 Fernverbindungen.

Weiterhin sei $\bar{P}(n|s)$ die Wahrscheinlichkeit, daß zwei Knoten mit Minimalabstand s den Gitterabstand n haben. $P(s)$ gebe die Wahrscheinlichkeit an, daß zwei beliebig gewählte Knoten den Minimalabstand s besitzen und $\bar{P}(n)$ die Wahrscheinlichkeit, daß zwei beliebig gewählte Knoten den Gitterabstand n haben. Dies ist einfach die Anzahl der Knoten, die man im Gitterabstand $n < N$ von einem festen Ausgangspunkt findet, geteilt durch die Gesamtknotenzahl L^d .

$$\begin{aligned}\bar{P}(n) &= \frac{1}{L^d - 1} a_d(n) \\ &= \frac{2^d}{(L^d - 1)(n - 1)!} n^{d-1} + o(|n^{d-3}|).\end{aligned}\quad (5.22)$$

Schließlich gebe $P(s, n)$ an, wie groß die Wahrscheinlichkeit ist, daß zwei zufällig ausgewählte Knoten gleichzeitig den Gitterabstand n und den Minimalabstand s haben.

Es gilt $P(s, n) = \bar{P}(n)P(s|n)$ und mit Gleichung (5.21) und $s < n$ folgt $P(s, n) = \bar{P}(n)A(s)$. In diesem Fall ist also $P(s, n)$ durch dN Größen (die $A(s)$) bestimmt, da die $\bar{P}(n) = \sum_s P(s, n)$ bekannt sind. Es bleiben die $P(n, n)$ zu bestimmen, ebenfalls dN Unbekannte. Nun ist $P(s) = \sum_n P(s, n)$,

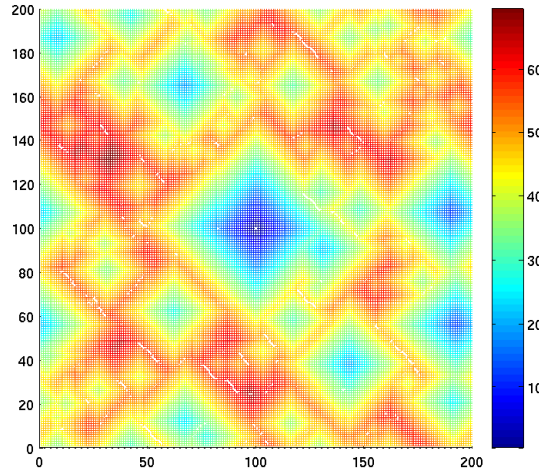


Abbildung 5.9: Zweidimensionales Small-World-Modell: Weglängen vom zentralen Punkt in einem Gitter der Größe $L = 200$ und mit 100 Fernverbindungen. Nahe Punkte sind blau eingefärbt, weit entfernte rot. Während die ersten Keime regelmäßige Rauten sind, bilden die sich gegen Ende schließenden Stellen langgezogene Rechtecke.

wobei $P(s)$ als bekannt vorausgesetzt wird. Dabei handelt es sich um je dN Gleichungen, aus denen durch das Eliminieren von $P(n, n)$ das Gleichungssystem

$$P(s) - \bar{P}(s) = A(s) \sum_{n=s+1}^{dN} \bar{P}(n) - \bar{P}(s) \sum_{n=1}^{s-1} A(n)$$

hervorgeht, dessen Koeffizientenmatrix bereits diagonal mit nicht verschwindenden Diagonalelementen ist. Folglich existiert eine eindeutige Lösung des Problems. Durch Rückwärtseinsetzen erhält man auch die

$$P(n, n) = \bar{P}(n) \left(1 - \sum_{s=1}^{n-1} A(s) \right) = \bar{P}(n) \sum_{s=n}^{dN} A(s),$$

wobei von der Beziehung $\sum A(s) = 1$ Gebrauch gemacht wurde. Insgesamt folgt

$$P(s, n) = \bar{P}(n) \left(\theta(n - s) A(s) + \delta_{s,n} \sum_{i=n}^{dN} A(i) \right).$$

Auch hier soll nun der Kontinuumsfall untersucht werden. Da es sich bei den $P(s)$, $\bar{P}(n)$, $P(s, n)$ etc. um Wahrscheinlichkeitsdichten handelt, gilt:

$$\begin{aligned} P(s) ds &= LP(x) dx \\ P(s, n) ds dn &= L^2 P(x, y) dx dy, \end{aligned}$$

wobei $ds = \Delta s = 1$. Ebenso für $A(s)$ und $\bar{P}(n)$. Es gilt $\delta_{s,n} \rightarrow L\delta(x - y)$. Damit erhält man für $L \rightarrow \infty$

$$\bar{P}(y) = \begin{cases} 2 & \text{für } d = 1 \\ 4(1/2 - |y - 1/2|)^{d-1} & \text{für } d = 2 \end{cases}$$

$$P(x) - \bar{P}(x) = A(x) \int_x^1 \bar{P}(y) dy - \bar{P}(x) \int_0^x A(y) dy$$

$$P(x, y) = \theta(y - x) \bar{P}(y) A(x) + \delta(y - x) \bar{P}(y) \int_y^1 A(x) dx.$$

Es zeigt sich damit, daß die Verteilung $P(x, y)$ vollständig bestimmbar ist aus geometrischen Überlegungen und der Kenntnis von $P(x)$.

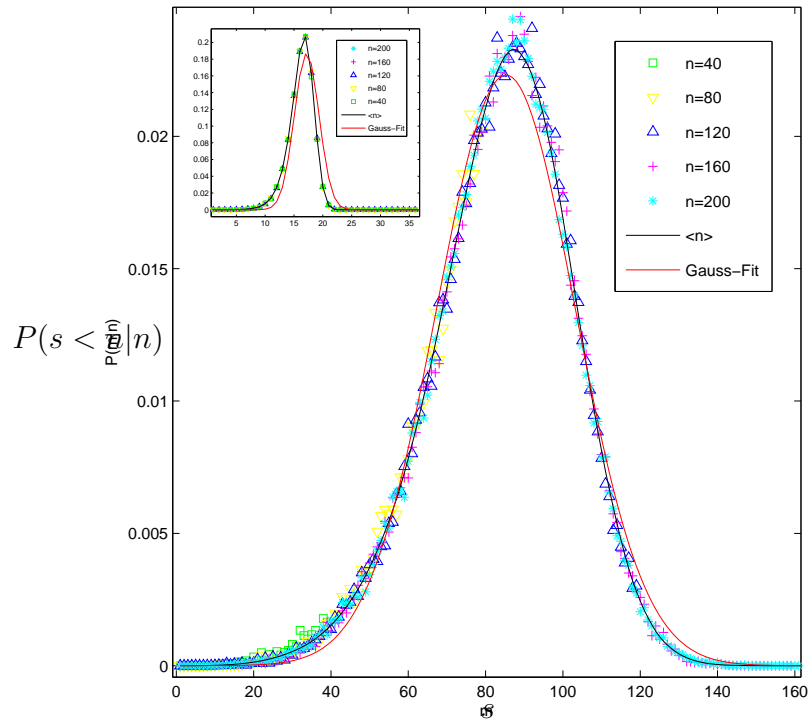


Abbildung 5.10: Zweidimensionaler Small-World-Graph (Typ C): $P(s < n|n)$ über s für verschiedene Werte von n . Gitter mit 501^2 Knoten und 200 Fernverbindungen. **Kleine Abbildung:** 25 000 Fernverbindungen.

Im Gegensatz zum eindimensionalen Fall, wie er von MOORE und NEWMAN (2002) dargestellt wurde, ist im zweidimensionalen Fall $P(s < n|n)$ nicht normalverteilt. Eine mögliche Erklärung dafür könnte sein, daß im eindimensionalen Fall für die Größe $m(r)$ eine Symmetrie zwischen Werten für $r \rightarrow 0$

und $r \rightarrow 1$ besteht, die im zweidimensionalen Fall aber nicht mehr vorlegt, da die entstehenden Keime rautenförmig sind, während die sich schließenden Lücken langgezogenen Rechtecken ähneln (vgl. Abb. 5.9).

6 Dynamik: Epidemien, Perkolation und Aktivitätsmuster

6.1 Perkolation

Ein aus der statistischen Physik bekanntes Problem ist die Perkolation, die auf Netzwerken eingehend untersucht wurde. Gewöhnlich spricht man von Perkolationsphänomenen auf Netzwerken¹¹, wenn auf einem Graphen die Knoten (Platzperkolation, ENGL. site percolation) oder die Kanten (Bindungsperkolation, ENGL. bond percolation) mit einer gewissen Wahrscheinlichkeit belegt sind und dabei die Frage untersucht wird, bei welcher Wahrscheinlichkeit eine zusammenhängende, das Netzwerk überspannende Ansammlung (ENGL. infinite cluster) bzw. übergroße Komponente (ENGL. giant component) entsteht, die den gesamten Graphen überspannt. Diese Grenzwahrscheinlichkeit wird als *Perkolationsschwelle* (ENGL. percolation threshold) bezeichnet.

Im allgemeinen untersucht die Perkolationstheorie die Skalenexponenten bestimmter Größen. Diese hängen von der Dimension ab, oberhalb der kritischen Dimension d_c sind die Exponenten universell. Da Netzwerke von hoher Dimension sind (vgl. S. 14), gibt es Parallelen zur Perkolation in unendlicher Dimension (ALBERT und BARABÁSI 2002) und man findet die selben Exponenten (SCHWABL 2000, 395f).

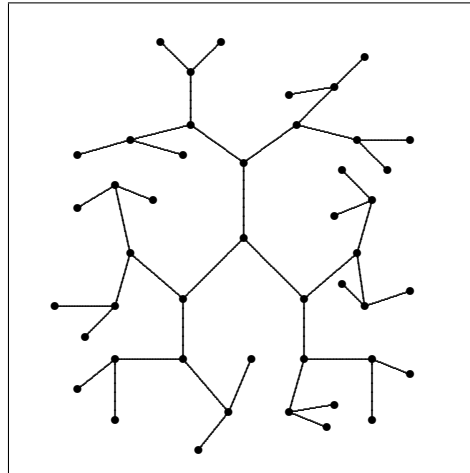
Zu Beginn soll ein exakt lösbares Beispiel für Perkolation untersucht werden.

Definition 16 *Man gehe von einem Knoten aus, der mit k weiteren Knoten verbunden ist. Jeder von diesen hat wiederum $k - 1$ weitere Nachbarn, die wiederum $k - 1$ weitere Nachbarn haben, so daß der entstehende Graph ein Baum ist. Dieses Verfahren wiederholt man l -mal. Alle Knoten haben den Grad k , außer den äußersten Knoten, die als Oberfläche bezeichnet werden. Graphen dieser Art heißen Bethe-Gitter oder Cayley-Baum mit l Schalen.*

Beim Bethe-Gitter ist die Zahl der Knoten an der Oberfläche gleich $k(k - 1)^{l-1}$, die Größe des Graphen mit l Schalen (sein Volumen) ist

$$N(l) = 1 + \sum_{i=1}^{l-1} k(k-1)^i = 1 + \frac{(k-1)^{l-1} - 1}{k-2}.$$

¹¹Vgl. Anm. 10 in MOORE und NEWMAN (2000), wo darauf hingewiesen wird, daß im ursprünglichen Wortsinn nicht von Perkolation gesprochen werden kann. Dennoch hat sich der hier verwendete Sprachgebrauch in den letzten Jahren eingebürgert.

Abbildung 6.1: Bethe-Gitter der Ordnung $k = 3$.

Es ist ersichtlich, daß für große l die Oberfläche des Graphen proportional zum Volumen ist. Bei d -dimensionalen Gittern gilt Oberfläche \propto Volumen $^{1-1/d}$, in diesem Sinne ist das Bethe-Gitter ein unendlichdimensionales Gitter.

Satz 3 Die Schwelle für Bindungsperkolation im Bethe-Gitter ist

$$p_c = \frac{1}{k-1}.$$

Beweis: Um einen unendlichen Pfad durch das Bethe-Gitter zu finden, muß von einem Knoten, zu dem man gelangt, wenigstens eine der $k-1$ möglichen, weiterführenden Verbindungen existieren, also $(k-1)p_c = 1$. *qed.*

Definition 17 Sei $P(k)$ eine Verteilung der Zufallsvariablen $k \in \mathbb{N}$. Dann heißt

$$E_0(z) := \sum_{k=0}^{\infty} z^k P(k)$$

mit $z \in \mathbb{C}$ erzeugende Funktion der Verteilung $P(k)$.

Die erzeugende Funktion enthält dieselbe Information wie die Verteilung.

Satz 4 Aus der erzeugenden Funktion kann die Verteilung errechnet werden:

$$P(k) = \frac{1}{k!} \left. \frac{d^k E_0}{dz^k} \right|_{z=0} = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{E_0(z)}{z^{k+1}} dz. \quad (6.1)$$

Dabei wurde vom Cauchyschen Integralsatz Gebrauch gemacht.

Satz 5 *Aus der erzeugenden Funktion kann das n -te Moment der Verteilung folgendermaßen berechnet werden:*

$$\langle k^n \rangle = \sum_{k=0}^{\infty} k^n P(k) = \left[\left(z \frac{d}{dz} \right)^n E_0(z) \right]_{z=1}. \quad (6.2)$$

Satz 6 *Sei $E_0(z)$ die erzeugende Funktion der Verteilung (hier als p_k bezeichnet) der Zufallsvariablen k . Dann ist die erzeugende Funktion der Verteilung der Zufallsvariablen $K = k_1 + k_2 + \dots + k_m$, die durch die Summe von m Werten von k entsteht, gegeben durch $[E_0(z)]^m$.*

Beweis: Die Verteilung der Summe von m Werten kann immer auf die Summe zweier Werte zurückgeführt werden, indem man die Verteilung zweier Teilsommen betrachtet. Es gilt für $m = 2$

$$\begin{aligned} [E_0(z)]^2 &= \left[\sum_k z^k p_k \right]^2 = \sum_{jk} z^{k+j} p_j p_k = \\ &= p_0 p_0 z^0 + (p_0 p_1 + p_1 p_0) z^1 + (p_0 p_2 + p_1 p_1 + p_2 p_0) z^2 + \dots \end{aligned}$$

Da alle möglichen Kombinationen zweier p_k vorkommen und mit der zugehörigen Potenz von z multipliziert werden, ist klar, daß der letzte Ausdruck die erzeugende Funktion von $P(K)$ ist. *qed.*

6.1.1 Perkolation auf Zufallsgraphen

Nun werden einige Ergebnisse für Zufallsgraphen mit beliebiger Gradverteilung $P(k)$ vorgestellt (NEWMAN et al. 2001). Die erste Eigenschaft, die mit diesen Hilfsmitteln untersucht werden soll, ist die Verteilung des Grades des Knotens, den man erreicht, wenn man eine zufällig ausgewählte Verbindung abläuft. Die Wahrscheinlichkeit, auf diese Weise einen bestimmten Knoten zu erreichen, ist proportional zum Grad dieses Knotens, der der Verteilung $P(k)$ folgt. Damit ist die zugehörige, normalisierte Erzeugende

$$\frac{\sum_k k z^k P(k)}{\sum_k k P(k)} = z \frac{E'_0(z)}{E'_0(1)} = z \frac{E'_0(z)}{\langle k \rangle}.$$

Beginnt man bei einem beliebigen Knoten und folgt allen Verbindungen, so folgt der Grad dieser Verbindungen der zu obigen Erzeugenden gehörenden

Verteilung, allerdings zählt man dabei die Verbindungen zum Ausgangsknoten mit. Will man dies vermeiden, um die Verteilung der Zahl der zweitnächsten Knoten zu berechnen, so muß man die erzeugende Funktion durch z teilen:

$$E_1(z) := \frac{E'_0(z)}{E'_0(1)} = \frac{E'_0(z)}{\langle k \rangle}. \quad (6.3)$$

Dies ist die Verteilung, der von den im ersten Schritt erreichten Knoten ausgehenden Verbindungen. Damit handelt es sich um die Zahl der zweitnächsten Nachbarn, die über eine Verbindung erreicht werden können. Dabei vernachlässigt man, daß mit Wahrscheinlichkeit N^{-1} diese Verbindungen zwischen den schon erreichten Knoten liegen. Für große Gesamtknotenzahlen N ist dies gerechtfertigt und bedeutet, daß man von einer baumartigen Struktur (vgl. Def. 12) des Graphen ausgeht. Über die Summeneigenschaft aus Satz 6 folgt dann für die Verteilung der zweitnächsten Nachbarn

$$\sum_k [E_1(z)]^k P(k) = E_0(E_1(z)).$$

Daraus kann die mittlere Zahl der zweitnächsten Nachbarn berechnet werden

$$\nu_2 = \left[\frac{d}{dz} E_0(E_1(z)) \right]_{z=1} = E'_0(1) E'_1(1) = E''_0(1) = \sum_k k(k-1)P(k). \quad (6.4)$$

Analog lassen sich die Verteilung der drittnächsten Nachbarn zu $E_0(E_1(E_1(1)))$ usw. berechnen. Es ergibt sich damit

$$\nu_m = [E'_1(1)]^{m-1} E'_0(1) = \frac{\nu_2^{m-1}}{\nu_1^{m-2}},$$

wobei $\nu_1 = \langle k \rangle$ und $m \geq 1$. Es kann nun die charakteristische Weglänge abgeschätzt werden, wenn man annimmt, daß $1 + \sum_{m=1}^{\ell} \nu_m \approx N$, wobei $N \gg \nu_1, \nu_2$. Es ergibt sich dann

$$\begin{aligned} \ell &\approx \frac{\ln \left(\frac{(\nu_2 - \nu_1)}{\nu_1^2} (N - 1) + 1 \right)}{\ln(\nu_2 / \nu_1)} \\ &\approx \frac{\ln(N / \nu_1) + \ln[(\nu_2 - \nu_1) / \nu_1]}{\ln(\nu_2 / \nu_1)}. \end{aligned}$$

Man vergleiche dieses Ergebnis mit Gleichung (4.1). Dies ist eine grobe Abschätzung. Wenn $P(k) \sim k^{-\gamma}$ mit $\gamma \leq 3$, so divergiert ν_2 , wie sich aus Gleichung (6.4) ersehen läßt. Dies liegt an der Annahme baumartiger Strukturen, die für $\gamma < 3$ nicht zulässig ist.

Nun wollen wir die Verteilung der Größe von Zusammenhangskomponenten untersuchen. Es sei $H_1(z)$ die Erzeugende der Verteilung der Größe von Komponenten, die man dadurch erreicht, daß man eine Verbindung zufällig auswählt und zu einem der Enden läuft. Dabei soll $H_1(z)$ oberhalb der Perkolationsschwelle ohne die überspannende Ansammlung gebildet werden. Außer im Bereich des Phasenübergangs wird deswegen die Verteilung von Komponenten endlicher Größe gebildet. Die Wahrscheinlichkeit, geschlossene Schleifen (zyklische Untergraphen) zu finden, ist $\sim N^{-1}$, damit im Grenzfalle großer N vernachlässigbar. Damit wird erneut die Annahme baumartiger Struktur gerechtfertigt (vgl. Abb. 6.2).

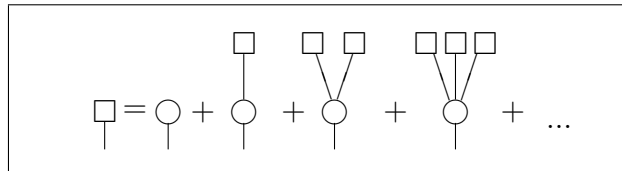


Abbildung 6.2: Graphische Darstellung der Summenregel mit baumartiger Struktur.

Folglich besteht eine Komponente aus dem Ausgangsknoten, an den sich baumartig weitere Komponenten anschließen, die der gleichen Verteilung folgen, die von $H_1(z)$ erzeugt wird. Mit der Summeneigenschaft aus Satz 6 muß also gelten

$$H_1(z) = zq_0 + zq_1H_1(z) + zq_2[H_1(x)]^2 + \dots$$

wobei q_k die Wahrscheinlichkeit angibt, neben der Verbindung, auf der man zum Knoten gelangt ist, weitere k Verbindungen zu finden. Mit den Ausführungen zur Verteilung (Gl. 6.3) genau dieser Wahrscheinlichkeit erhält man

$$H_1(z) = zE_1(H_1(z)). \quad (6.5)$$

Startet man nun bei einem zufällig ausgewählten Knoten, so findet man an jedem Ende eine Komponente dieser Art und kann mit der Summenregel die Erzeugende der Verteilung der Komponentengröße herleiten

$$H_0(z) = zE_0(H_1(z)). \quad (6.6)$$

Die durchschnittliche Größe einer Komponente ergibt sich zu

$$\langle s \rangle = H_0'(1) = 1 + E_0'(1)H_1'(1).$$

Mit Gleichung (6.6) erhält man über

$$H_1'(1) = 1 + E_1'(1)H_1'(1)$$

die Beziehung

$$\langle s \rangle = 1 + \frac{E_0'(1)}{1 - E_1'(1)}.$$

Für $E_1'(1) < 1$ existiert keine überspannende Ansammlung. Die Größe der endlichen Komponenten divergiert für $E_1'(1) = 1$, was gleichbedeutend ist mit

$$\begin{aligned} 0 &= E_0''(1) - E_0'(1) \\ &= \sum_k k(k-2)P(k) \\ &= \langle k^2 \rangle - 2\langle k \rangle. \end{aligned}$$

Daraus ist mit Gleichung (6.4) ersichtlich, daß eine dominierende Komponente genau dann auftritt, wenn die mittlere Zahl der zweitnächsten Nachbarn die der nächsten Nachbarn übersteigt

$$\nu_2 > \nu_1.$$

6.1.2 Perkolation auf Small-World-Graphen

Perkulationsphänomene sind auf Small-World-Graphen eingehend untersucht worden. Dabei gehen die meisten Autoren vom Typ B aus, wie es hier auch der Fall sein soll. Mit dem Hilfsmittel der erzeugenden Funktionen gelang es MOORE und NEWMAN (2002), das eindimensionale Small-World-Modell exakt zu lösen, und zwar sowohl für Platz-, als auch für Bindungsperkolation. Es sei l im folgenden die Zahl der nächsten Nachbarn auf dem Grundgitter der Größe L , dem $\phi l L$ Fernverbindungen hinzugefügt werden. Die Besetzungswahrscheinlichkeit werde mit p bezeichnet.

Platzperkolation

Es sei $P(n)$ die Wahrscheinlichkeit, daß ein beliebiger Knoten zu einer Komponente der Größe n gehört. Als lokale Komponente werde eine Ansammlung von besetzten Plätzen auf dem Grundgitter bezeichnet. Diese bilden mit den Fernverbindungen größere Komponenten. Es sei $P_0(n)$ die Wahrscheinlichkeit, daß ein zufällig ausgewählter Knoten zu einer lokalen Komponente der

Größe n gehört. Es ist $q = 1 - (1 - p)^l$ die Wahrscheinlichkeit, daß wenigstens einer der Nachbarn eines Platzes besetzt ist. Dann gilt

$$P_0(n) = \begin{cases} 1 - p & \text{für } n = 0 \\ npq^{n-1}(1 - q)^2 & \text{für } n \geq 1 \end{cases} \quad (6.7)$$

Die entsprechende Erzeugende ist

$$H_0(z) = \sum_{n=0}^{\infty} z^n P_0(n) = 1 - p + pz \frac{(1 - q)^2}{(1 - qz)^2},$$

wie man mit der endlichen geometrischen Reihe nachrechnet. Das zweite Gleichheitszeichen gilt zudem nur für große L . Die Verteilung der lokalen Komponenten errechnet sich daraus mittels Gleichung (6.1). Über vollständige Induktion weißt man nach, daß für $n \geq 1$

$$\frac{d^n}{dz^n} H_0(z) = n \frac{n! q^{n-1} p (1 - q)^2}{(1 - qz)^{n-1}} + \frac{(n + 1)! q^n p (1 - q)^2}{(1 - qz)^{n+2}} z.$$

Daraus folgt mit Gleichung (6.1)

$$P_0(n) = nq^{n-1}p(1 - q)^2.$$

Damit fällt für $p < 1$, also $q < 1$ die Verteilung der lokalen Komponenten exponentiell mit n ab. Dies wiederum rechtfertigt die Annahme, daß die von einer lokalen Ansammlung ausgehenden Fernverbindungen nie die gleiche Komponente treffen werden. Es liegt also wieder eine baumartige Struktur vor. So wird erneut gezeigt, daß die Summenregel, wie sie in Abbildung 6.2 illustriert wurde, angewendet werden kann. Mit $P(m|n)$ der Wahrscheinlichkeit, daß aus einer lokalen Komponente der Größe n genau m Fernverbindungen ausgehen, kann man also für die Erzeugende von $P(n)$ schreiben als

$$H(z) = \sum_{n=0}^{\infty} z^n P_0(n) \sum_{m=0}^{\infty} P(m|n) [H(z)]^m.$$

Da es im Graphen $2\phi lL$ Enden von Fernverbindungen gibt, gilt

$$P(m|n) = \binom{2\phi lL}{m} \left[\frac{n}{L} \right]^m \left[1 - \frac{n}{L} \right]^{2\phi lL - m}.$$

Damit wird

$$\begin{aligned} H(z) &= \sum_{n=0}^{\infty} z^n P_0(n) \left[1 + (H(z) - 1) \frac{n}{L} \right]^{2\phi lL} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} [ze^{2\phi l(H(z)-1)}]^n P_0(n) \\ &= H_0(ze^{2\phi l(H(z)-1)}), \end{aligned}$$

wobei das zweite Gleichheitszeichen im Fall großer L gilt. Um diese Formel numerisch auszuwerten ist es günstig, vom Cauchyschen Integralsatz Gebrauch zu machen (vgl. Gl. 6.1). Ebenso können nun leicht die Momente der Verteilung berechnet werden (Gl. 6.2). Es ist der Mittelwert der Komponentengröße

$$\langle n \rangle = H'(1) = \frac{p(1+q)}{1-q-2\phi lp(1-q)}.$$

An der Perkolationsschwelle p_c divergiert dieser Ausdruck, damit gilt

$$\phi = \frac{(1-p_c)^l}{2lp_c(2-(1-p_c)^l)}.$$

Ausgehend von diesem Vorgehen, leiten MOORE und NEWMAN (2002) auch die Skalensexponenten her.

Bindungsp Perkolation

Die Argumentation bei der Bindungsp Perkolation ist die gleiche wie bei der Platzperkolation, allerdings mit zwei Einschränkungen. Sei nun p die Wahrscheinlichkeit, daß eine Verbindung besetzt ist und $l = 1$ (für $l > 1$ werden die Ausdrücke kompliziert und eine geschlossene Lösung für $P_0(n)$ wurde noch nicht gefunden). Es ist nun die Verteilung der lokalen Komponenten

$$P_0(n) = np^{n-1}(1-p)^2.$$

Verglichen mit Gleichung (6.7) mit $q = p$ wegen $l = 1$ fehlt ein Faktor p und $P_0(0) = 0$. Damit folgt

$$H_0(z) = z \frac{(1-p)^2}{(1-pz)^2}.$$

Die zweite Einschränkung ist, daß zwei lokale Komponenten nicht verbunden sind, wenn eine Fernverbindung nur existiert, sondern nur wenn diese auch besetzt ist. Deswegen muß ϕ nun durch ϕp ersetzt werden.

$$H(z) = H_0(ze^{2\phi p(H(z)-1)})$$

und

$$\langle n \rangle = H'(1) = \frac{H'_0(1)}{1-2\phi p H'_0(1)} = \frac{1+p}{1-p-2\phi p(1+p)}.$$

Woraus die Gleichung

$$\phi = \frac{1 - p_c}{2p_c(1 + p_c)}$$

für die kritische Wahrscheinlichkeit folgt.

Es wurden im Zusammenhang mit Perkolation auch einige andere Fragestellungen untersucht. WARREN et al. (2001) haben die Möglichkeit einer variablen Besetzungswahrscheinlichkeit untersucht, die einer vorgegebenen Verteilung folgt. Die Bindungsperkolation im Small-World-Modell mit zweidimensionalem Grundgitter sind von NEWMAN et al. (2002) beschrieben worden. Das Vorgehen im d -dimensionalen Fall ist das gleiche wie im eindimensionalen, allerdings ist L durch L^d zu ersetzen und für ϕ schreibt man nun ϕd . Es ergibt sich so für die Perkolationsschwelle

$$2d\phi p H'_0(1)|_{p=p_c} = 1.$$

Dieser Ausdruck wird nun von NEWMAN et al. (2002) in einer Reihenentwicklung ausgewertet. Weitere Ergebnisse der Perkolationstheorie für Netzwerke verschiedenen Typs finden sich bei ALBERT und BARABÁSI (2002) und DOROGVTSEV und MENDES (2002).

6.2 Dynamische Modelle

Auf Gittern und Netzwerken wurden in den vergangenen Jahren verschiedene dynamische Modelle vorgeschlagen, die dazu dienen sollen, die Ausbreitung von Krankheiten, von Gerüchten, Waldbränden oder auch die Aktivität von Nervenzellen zu beschreiben. Im folgenden sollen vor allem Modelle auf Small-World-Graphen besprochen werden. Ein Überblick bietet NEWMAN (2000). Weitere Hinweise finden sich am Ende von Abschnitt 4.3.

Das SI-Modell*

Im Zusammenhang mit der Ausbreitung von Prionen im Gehirn wurde ein Modell vorgeschlagen, in dem die Knoten exakt zwei Zustände einnehmen können, nämlich *empfindlich* (ENGL. susceptible) und *infiziert* (ENGL. infected). Ein Knoten, der infiziert ist, bleibt für immer infiziert und steckt in jedem Zeitschritt mit Wahrscheinlichkeit p seine Nachbarn an. Das Modell ist begründet in der langen Inkubationszeit der Krankheit, so daß das Absterben von Zellen die Ausbreitung nicht beeinflußt. Es wurde numerisch auf verschiedenen Graphentypen untersucht, z. B. auf skalenfreien und auf Small-World-Graphen (MATTHÄUS 2004).

Beginnt man in einem d -dimensionalen Small-World-Modell mit M Fernverbindungen (Typ C) und führt einen infizierten Knoten ein, so wird das Netzwerk nach endlicher Zeit vollständig infiziert sein, falls $p > 0$. Es stellt sich die Frage, wie die Infektion abläuft und nach welcher Zeit der gesamte Graph befallen ist.

Für $p = 1$ ist das Modell bereits durch die Überlegungen in Abschnitt 5 erfaßt. Für $p < 1$ ist es etwas komplizierter: Im eindimensionalen Modell gibt es für $M = 0$ immer genau zwei Knoten an der Oberfläche, die Krankheit wird sich nun im Mittel pro Schritt nur p Plätze ausbreiten und statt $L/2$ wird es nun etwa $pL/2$ dauern, bis das ganze Gitter befallen ist. Analog könnte man annehmen, daß im Kontinuumsfall der Anteil der infizierten Knoten gegeben ist durch

$$I(x, p, M) = I(xp, 1, pM), \quad (6.8)$$

wobei angenommen wird, daß sich die effektive Zahl der Fernverbindungen auf pM reduziere. $I(x, 1, M)$ ist durch die Geometrie gegeben und entspricht \tilde{m} (vgl. Gl. 5.9). Es folgt

$$\frac{1}{p} \frac{\partial}{\partial x} I(x, p, M) = \frac{\partial}{\partial y} I(y, 1, pM)$$

mit $y = xp$.

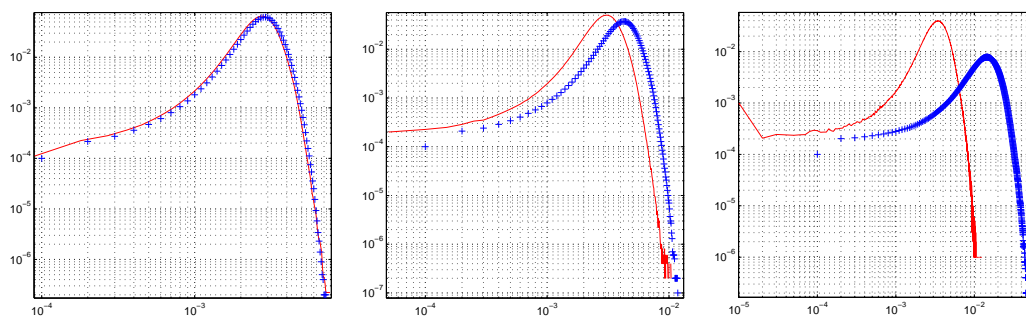


Abbildung 6.3: SI-Prozeß auf eindimensionalem Small-World-Graph (Typ C, $l = 1$) $\frac{\partial I(x, 1, pM)}{\partial x}$ für $pM = 900, 500, 100$ (links nach rechts) in blau. In rot $\frac{\partial I(y, 1, pM)}{\partial y}$ über y für $p = 0, 9; 0, 5; 0, 1$ und $M = 1000$.

Die Simulation zeigt jedoch, daß (6.8) nicht gerechtfertigt ist (Abb. 6.3): Der Ansatz unterschätzt die Wirkung der Fernverbindungen; die minimalen Abstände sind kürzer, als man es nach Gleichung (6.8) erwarten würde. Die effektive Zahl von Fernverbindungen M_{eff} ist nach oben durch M beschränkt, deswegen gilt $pM < M_{eff} < M$.

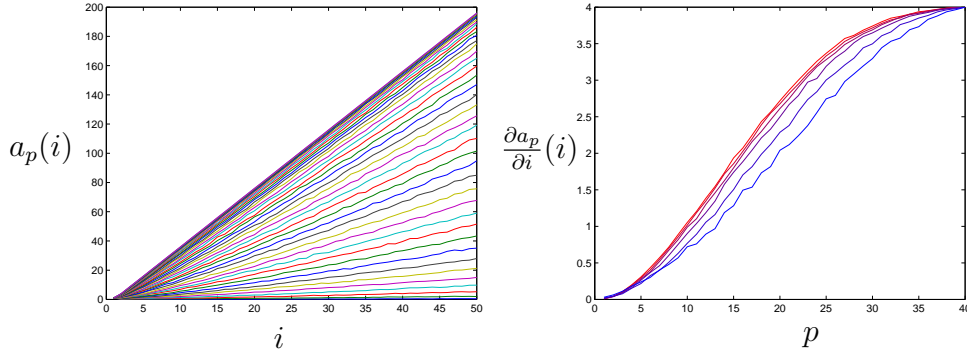


Abbildung 6.4: **Links:** Verlauf der Ausbreitung einer SI-Krankheit auf dem regulären, zweidimensionalen Gitter mit $l = 1$. Die Wahrscheinlichkeit geht von 0,025 (flachste Kurve) in Schritten von 0,025 bis 1 (steilste Kurve). Es wurde über 2000 Durchgänge gemittelt. **Rechts:** Steigung von $a_p(i)$ für verschiedene Punkte $i = 5, 10, 20, 30, 40, 50$ von blau nach rot.

In zwei Dimensionen ist bereits der Fall des regulären Gitters komplizierter. Durch Umskalieren kann die Wahrscheinlichkeit nicht auf $p = 1$ transformiert werden. Bei der Ausbreitung eines Keimes findet man den Verlauf $a_p(i)$ gemäß Abbildung 6.4 (links). Bis auf die unmittelbare Anfangsphase scheint es einen linearen Anstieg zu geben. Diese Steigung hat einen Verlauf gemäß Abbildung 6.4 (rechts). Wird dieses allgemeine a_p in die Iterationsgleichung (5.8) eingesetzt, so bleibt die Frage zu beantworten, inwieweit $p < 1$ zu einer effektiven Absenkung der Zahl der Fernverbindungen führt. Nimmt man an, daß sich ihre Zahl nicht reduziere, so erhält man aus (5.8) und (5.7) folgende Iterationsgleichungen

$$\Delta I_k(i) = \frac{I(i)}{L^d} \left(\sum_{j=2}^{i-1} a_p(j-1) \Delta I_f(i-j+1) - a_p(i-1) \right) \quad (6.9)$$

$$\Delta I_f(i) = \frac{2M}{L^{2d}} \Delta I(i-1) [I(i) + \Delta I_k(i)] \quad (6.10)$$

$$\Delta I(i) = \Delta I_k(i) + \Delta I_f(i)$$

$$I(i) = \Delta I(i) + I(i-1)$$

$$I(0) = 1$$

Deren Übereinstimmung mit den Ergebnissen einer Simulation ist aus Abbildung 6.5 zu entnehmen. In diesem Bereich (kleine M) scheint es gerechtfertigt zu sein, von $M_{eff} \approx M$ auszugehen. Allerdings zeigt sich in Abbildung 6.6, daß dies für größere Zahlen von Fernverbindungen nicht mehr gilt.

Das elementare Problem der SI-Infektion auf dem quadratischen Gitter konnte vom Autor nicht gelöst werden. Möglicherweise gibt es dazu bereits

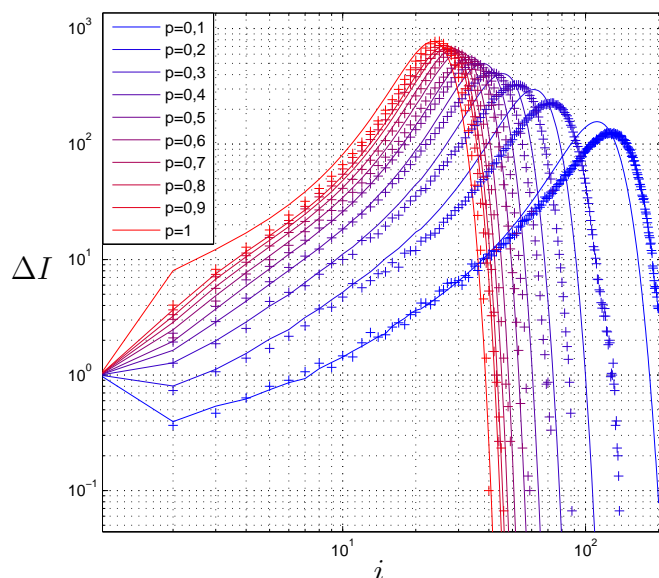


Abbildung 6.5: SI-Modell auf zweidimensionalem Small-World-Graph (Typ C, $l = 1$, $M = 100$) mit $p = 0, 1; 0, 2; \dots; 1$ von blau nach rot. Kreuzchen stehen für Ergebnisse einer Simulation (30 Stichproben), durchgezogen die Berechnung nach den Iterationsgleichungen (6.9) und (6.10).

eine Lösung. Die Funktion $a_p(i)$ wurde bis $i \leq 50$ aus Ergebnissen der Simulation entnommen und anschließend für größere Werte linear extrapoliert.

Das SIS-Modell

Ein anderes Modell kennt ebenfalls nur die zwei Zustände *empfindlich* und *infiziert*, läßt infizierte Knoten aber entweder nach einer festen Zeit oder mit einer gewissen Wahrscheinlichkeit q wieder gesunden, dann jedoch können sie ein weiteres Mal angesteckt werden usw.

Von PASTOR-SATORRAS und VESPIGNANI (2001) wurde dieses Modell auf Small-World- und auf skalenfreien Graphen untersucht. Im Fall von Small-World-Graphen lag ein eindimensionales Modell mit $\phi = 1$ zugrunde. Folglich handelte es sich um einen Zufallsgraphen mit der Einschränkung, daß jeder Knoten wenigstens eine gewisse Zahl von Verbindungen hat. Die infizierten Knoten sollten nach einem Zeitschritt in den empfindlichen Zustand zurückkehren. In einer kontinuierlichen Molekularfeldnäherung ergibt sich für den zeitlichen Verlauf des Anteils der infizierten Knoten

$$\frac{\partial I(t)}{\partial t} = -I(t) + p\langle k \rangle I(t)[1 - I(t)] + \text{Terme höherer Ordnung.} \quad (6.11)$$

Diese Gleichung kann im Fall $\phi \ll 1$ (bzw. $M \ll L^d$) nicht gültig sein:

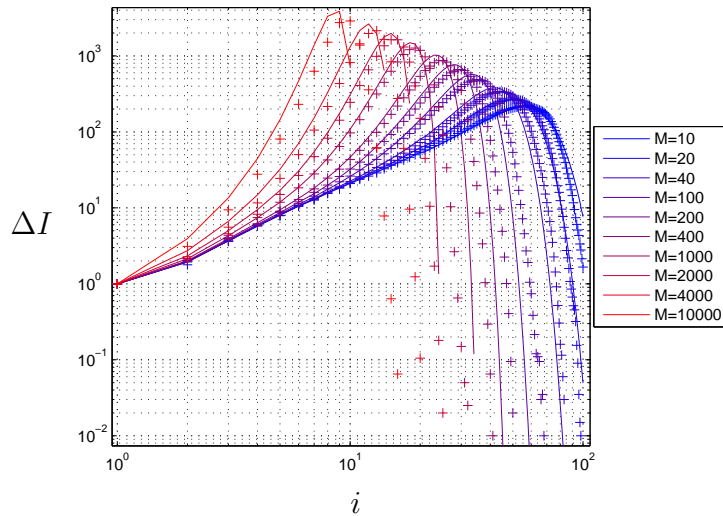


Abbildung 6.6: SI-Modell auf zweidimensionalem Small-World-Graph (Typ C, $l = 1$, $p = 0, 5$). Kreuzchen stehen für Ergebnisse einer Simulation (200 Stichproben), durchgezogen die Berechnung nach den Iterationsgleichungen (6.9) und (6.10).

Die Ausbreitung der Infektion auf einem regulären Gitter, welche in diesem Fall die Ausbreitung gegenüber Fernverbindungen dominiert, hängt nicht von der Zahl der infizierten Knoten, sondern von der Größe der Oberfläche der infizierten Knoten ab, da nur diese weitere Knoten anstecken können.

Wenn man davon ausgeht, daß das System für lange Zeit in ein Fließgleichgewicht einläuft mit der Bedingung

$$\frac{\partial I(t)}{\partial t} = 0$$

so folgt

$$I[-1 + p\langle k \rangle(1 - I)] = 0.$$

Dies definiert eine Schwelle $p_c = 1/\langle k \rangle$. Für $p < p_c$ wird für große Zeiten $I = 0$ sein und aus Gleichung (6.11) folgt in erster Ordnung, daß der Anteil der Infizierten exponentiell bis zum Aussterben der Infektion abnehmen wird. So kann eine charakteristische Zeitskala eingeführt werden. Für $p > p_c$ wird $I = (p - p_c)/p$. In numerischen Untersuchungen bestätigten sich diese Ergebnisse.

Es wurde auch das skalenfreie Modell untersucht. Im Gegensatz zum Small-World-Graphen gibt es hier für $\gamma \leq 3$ keine Schwellenwahrscheinlichkeit p_c bzw. $p_c = 0$, so daß für alle Infektionswahrscheinlichkeiten eine Ausbreitung der Infektion stattfinden wird. Dies ist eine Folge der Existenz von Knoten mit sehr großem Grad – da $P(k)$ nicht exponentiell, sondern

als Potenzgesetz abfällt, sind diese relativ wahrscheinlich. Es wurde gezeigt, daß ein gezieltes Immunisieren solcher Knoten jedoch zum Auftreten einer Schwellenwahrscheinlichkeit führt (DEZSÓ und BARABÁSI 2002).

Das SIR-Modell

Eine Möglichkeit, die vom SI- und SIS-Modell nicht erfaßt wird, ist das Sterben von Individuen nach einer Infektion. Für die Ausbreitung der Krankheit ist dies von der gleichen Wirkung, wie eine Immunisierung, die sich nach ausgeheilter Infektion einstellen kann, wie es bei Viren zu beobachten ist. Im Modell wird ein dritter möglicher Zustand eingeführt: Nach dem Zustand *infiziert* folgt der Zustand *entfernt* (ENGL. removed, daher SIR-Modell) bzw. *genesen* (ENGL. recovered).

Wenn jeder Knoten einen Zeitschritt infiziert ist, bevor er stirbt und jeder empfindliche Knoten, der mindestens einen infizierten Nachbarn hat mit Wahrscheinlichkeit p selbst erkrankt, so läßt sich die Ausbreitung der Krankheit auf das Problem der Bindungsp Perkolation abbilden. Falls $p < p_c$ wird sich die Krankheit nicht über das ganze Netzwerk ausbreiten. Die Verteilung der Komponentengröße entspricht unterhalb der Perkolationsschwelle der Verteilung der Größe eines Ausbruchs der Krankheit.

Ebenfalls im Zusammenhang mit dem SIR-Modell wurde darauf hingewiesen, daß manche Individuen überhaupt nicht empfindlich sind für bestimmte Krankheiten und nur ein Teil die Infektion weiterträgt. Es muß zwischen der *Empfindlichkeit* und der *Durchlässigkeit* unterschieden werden. Während jene die Wahrscheinlichkeit angibt, daß ein Individuum empfindlich für eine Krankheit ist, steht diese für die Wahrscheinlichkeit, daß der Kontakt eines empfindlichen aber gesunden Individuums mit einem infizierten zur Infektion des gesunden führt. Bindungsp Perkolation ist dann äquivalent zum Fall, daß die Empfindlichkeit gleich eins ist, und p für die Durchlässigkeit steht. Wenn die Empfindlichkeit p ist und die Durchlässigkeit gleich eins ist, so handelt es sich um eine Analogie zur Platzperkolation (NEWMAN und WATTS 1999b; MOORE und NEWMAN 2000).

WARREN et al. (2001) haben eine zweidimensionale Grundgeometrie für die Beschreibung von Pflanzeninfektionen vorgeschlagen. Von ihnen wurde klargestellt, daß im klassischen Perkulationsproblem dieser Art, eine starke Musterbildung mit Inseln und Schutzwällen bzw. Bannmeilen (ENGL. firewall) in der superkritischen Phase nur für $p \approx p_c$ auftritt. Es sei aber zu bezweifeln, daß die bei der Ausbreitung von Krankheiten in der Natur häufig beobachteten Muster darauf zurückgehen, daß die Ansteckungswahrscheinlichkeiten so nahe beim kritischen Wert liegen. Um dies zu ändern, machten sie den Ansatz, daß p keinen festen Wert habe, sondern einer Verteilung $f(p)$

folge. Jeder infizierte Knoten bleibe eine Zeit τ infektiös für seine Nachbarn, bevor er gesunde und immun werde. Hätte p einen festen Wert, so wäre die Wahrscheinlichkeit einen Nachbarn anzustecken $\varphi = 1 - (1 - p)^\tau$, nun ist

$$\varphi = 1 - \int (1 - p)^\tau f(p) dp.$$

An die Stelle von p tritt jetzt der Ordnungsparameter τ . Für bestimmte Verteilungen $f(p)$ wird der Anstieg der Größe der dominierenden Komponente als Funktion von τ breiter. Diese Beobachtung bleibt auch für ein zweidimensionales Small-World-Modell gültig.

Das SIRS-Modell

Um die Maul- und Klauenseuche zu modellieren, haben AGIZA et al. (2003) das SIR-Modell erweitert. Jeder empfindliche Knoten erkrankt hier mit Wahrscheinlichkeit p_1 beim Kontakt mit einem infizierten, gesundet nach einem Schritt und wird danach mit Wahrscheinlichkeit p_2 wieder empfindlich. Die entsprechenden Phasen wurden von ihnen auf numerischem Wege untersucht.

Modelle für erregende Neuronen*

Auf vollständig verbundenen Graphen wurden bereits Modelle für das Gedächtnis untersucht. MORELLI et al. (2004) legten ihrem Ansatz eine Small-World-Architektur zu grunde. Sie fanden eine kritische Wahrscheinlichkeit, unterhalb der keine gespeicherten Muster wiedergefunden werden konnten.

ROXIN et al. (2003) brachten dynamische Modelle auf Small-World-Graphen als Beispiel neuronaler Aktivität ins Spiel. Sie untersuchten integrierende Neuronen (ENGL. integrate-and-fire) in einer eindimensionalen Small-World-Architektur mit $l = 1$, deren langreichweitige Verbindungen gerichtet sind. Ihr besonderes Interesse gilt dem Auftreten selbstausgelöster Aktivität: In einem eindimensionalen Modell ohne Fernverbindungen sei die externe Spannung derart, daß bereits ein einziger Impuls genügt, alle seine Nachbarn zum Feuern zu bewegen. Erregt man nun künstlich eine Zelle, so wird sie mit einer gewissen Verzögerung ihre Nachbarn erregen, die wieder ihre Nachbarn usw., wobei ein Zurücklaufen der Erregung durch die Refraktärzeit der Neuronen nach dem Impuls verhindert wird. So läuft die Erregung nach Außen bzw. bei periodischen Randbedingungen löscht sie sich selbst aus. Werden nun zusätzlich gerichtete Fernverbindungen eingefügt, so besteht die Möglichkeit, daß die Erregung an Stellen des Netzwerkes läuft, die bereits erregt waren. Dies kann sich, bei geeigneter Netzwerkarchitektur beliebig wiederholen, so daß die Erregung nicht abklingt. Dann spricht man von *selbstausgelöster Aktivität* (ENGL. self-sustained activity). Wenn jedoch zu viele

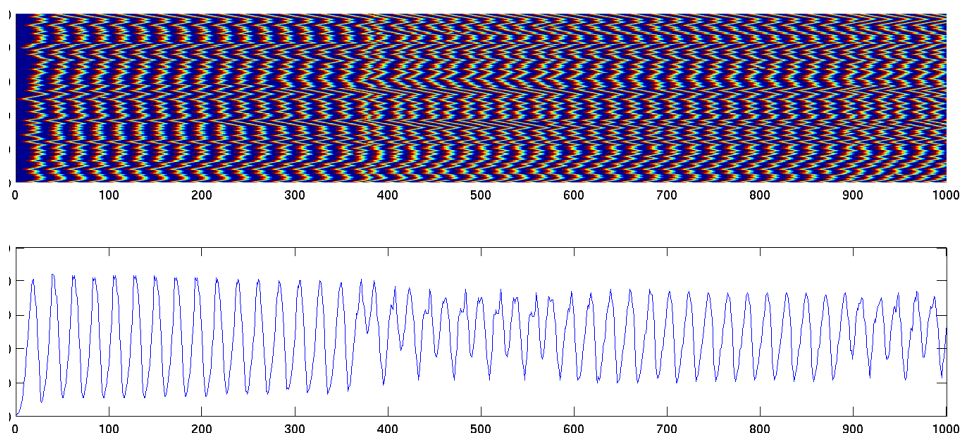


Abbildung 6.7: Eindimensionales Small-World-Modell (Typ C, $L = 1000$, $l = 1$, $M = 100$). **Oben:** SIRS-Aktivitätsmuster mit Knotennummer als Ordinate und Zeit als Abszisse. Rote Knoten sind erregt, die restliche Farbgebung verdeutlicht das Abklingen der Refraktärzeit $t_r = 10$. **Unten:** Zahl der Aktiven als Funktion der Zeit.

Fernverbindungen vorliegen, so wird ein einzelner Puls in wenigen Schritten auf das ganze Netzwerk übergreifen, das dann in eine Refraktärphase fällt, so daß die Erregung nicht weitergegeben werden kann; die Aktivität klingt ab. Dieses Problem kann zum Teil durch lange Verzögerungen bei der Erregungsübertragung ausgeglichen werden. Eine kritische Wahrscheinlichkeit für die Existenz von Fernverbindungen wurde eingeführt, indem bei dieser Wahrscheinlichkeit die charakteristische Weglänge mal die Verzögerung der Übertragung gleich der Refraktärzeit angenommen wird.

In Anlehnung an dieses Modell soll ein noch einfacheres Modell untersucht werden, das wie das SIRS-Modell aus drei Zuständen bestehe: Jede Zelle ist zu Beginn empfindlich, einige Knoten werden von außen erregt, anschließend errege jede Zelle mit Wahrscheinlichkeit p die Zellen, mit denen sie verbunden ist. Nach einem Zeitschritt wird eine erregte Zelle für t_r Schritte taub, bevor sie wieder empfindlich wird. Dieses Modell wurde auf dem eindimensionalen und zweidimensionalen Small-World-Graphen untersucht. Es stellte sich heraus, daß für eine bestimmte Wahl von Parametern M , p und t_r eine selbstausgelöste Aktivität auftritt (Abb. 6.7). In einem gewissen Teil der Fälle zeigte die Aktivität zudem eine Schwingung in der Zahl der erregten Knoten. Da im Gegensatz zum Modell von ROXIN et al. (2003) die Fernverbindungen in beide Richtungen Erregungen weiterleiten können, kann es für $p = 1$ unabhängig von M nur zu einer Aktivität kommen, wenn $t_r = 0$.

Es wurde untersucht, für welche Wahrscheinlichkeiten p selbstausgelöste Aktivität auftritt. So ergaben sich die Phasendiagramme Abb. 6.8. Der Ver-

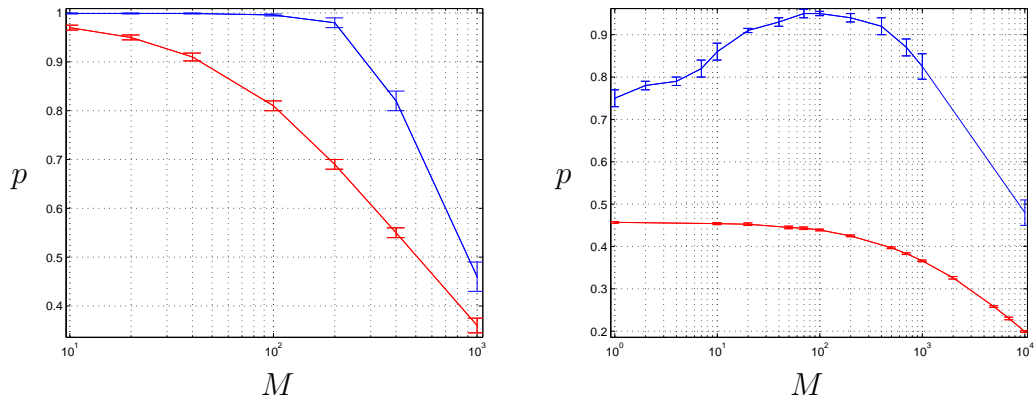


Abbildung 6.8: SIRS-Modell mit $t_r = 10$ auf Small-World-Modell (Typ C, $l = 1$): Unterhalb der roten und oberhalb der blauen Kurve ist die Wahrscheinlichkeit selbstausgelöste Aktivität zu finden kleiner 50%; die Balken geben an, wie groß die Spanne ist, in der die Wahrscheinlichkeit von 40% auf 60% steigt. **Links:** Eindimensional $L = 1000$, Mittelung über 200 Durchgänge. **Rechts:** Zweidimensional $L = 100$, Mittelung über 100 Durchgänge.

lauf der einzelnen Wahrscheinlichkeiten ist für des eindimensionale Modell in Abbildung 6.9 zu sehen. Unterhalb der kritischen Wahrscheinlichkeit klingt die Aktivität exponentiell mit der Zeit ab (Abb. 6.10).

Unmittelbar oberhalb von p_c bleibt die Zahl der aktiven Knoten konstant. Steigt p weiter, so wird durch die schnelle Ausbreitung der Erregung ein Teil der Knoten für t_r taub und kann nicht direkt erregt werden. Dies führt zu einer Schwingung der Zahl der Aktiven, wie sie für eine Dimension in Abbildung 6.7 zu sehen ist.

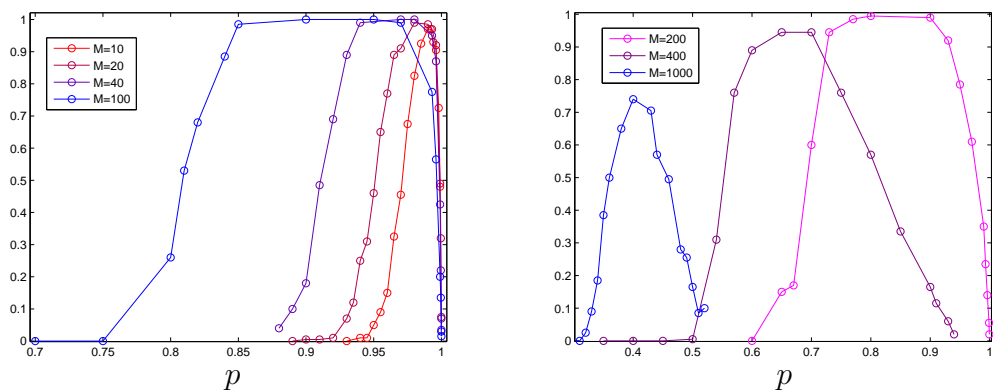


Abbildung 6.9: Eindimensionales Small-World-Modell (Typ C, $L = 1000$, $l = 1$): Wahrscheinlichkeit für das Auftreten selbstausgelöster Aktivität als Funktion der Erregungswahrscheinlichkeit p für verschiedene Werte von M .

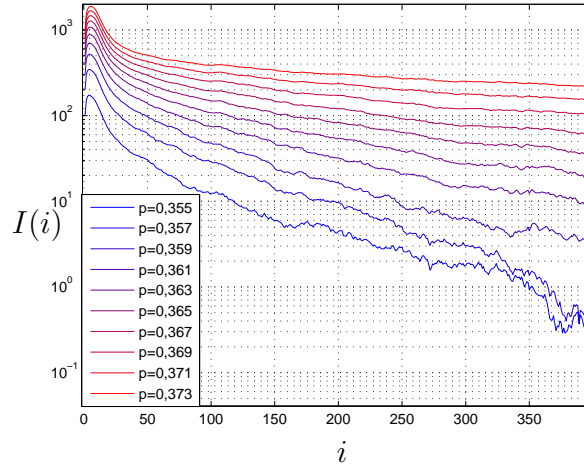


Abbildung 6.10: Zweidimensionales Small-World-Modell (Typ C, $L = 100$, $M = 1000$, $l = 1$): Zeitlicher Verlauf der Zahl der erregten Knoten. Mittelung über 100 Durchgänge.

Die untere Grenze für das Auftreten von Aktivität ist bestimmt durch die kritische Wahrscheinlichkeit

$$p_c = \frac{1}{\langle k_{eff} \rangle}.$$

Denn genau dann ist die Wahrscheinlichkeit, daß ein erregter Knoten im nächsten Schritt genau einen anderen Knoten ansteckt, gleich eins. Der effektive Grad hängt von verschiedenen Parametern ab. Er ist nicht gleich dem tatsächlichen Grad minus eins, denn der aktive Knoten ist von wenigstens einem, manchmal aber auch mehreren Knoten umgeben, die im vorherigen Schritt aktiv waren und die Erregung weitergegeben haben. Außerdem ist ein Teil der Knoten durch die Refraktärzeit taub für eine Erregung. Dies reduziert ebenfalls den effektiven Graph. Es wird folgender Ansatz gemacht:

$$\langle k_{eff} \rangle = \langle k_{eff} \rangle_0 + \frac{2M^\eta}{L^d}. \quad (6.12)$$

Der effektive Grad des regulären Gitters $\langle k_{eff} \rangle_0$ ist aus der entsprechenden Simulation bestimmbar. Der Exponent η berücksichtigt die Wahrscheinlichkeit, daß bei großen Anzahlen von Knoten doppelte Verbindungen zwischen zwei Plätzen möglich sind und die Wahrscheinlichkeit, daß eine Fernverbindung zu einem anderen erregbaren Knoten führt, absinkt. Im eindimensionalen Fall ist $\langle k_{eff} \rangle_0 = 1$ und der Exponent $\eta = 1$ gibt eine vergleichsweise gute Beschreibung der kritischen Wahrscheinlichkeit. Für den zweidimensionalen Fall

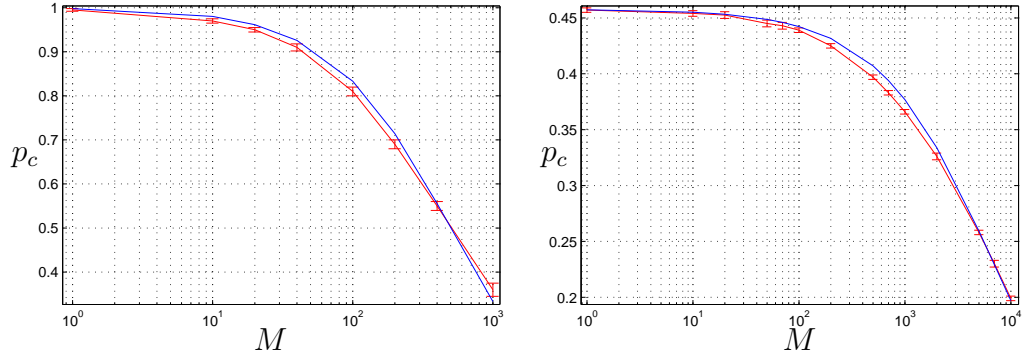


Abbildung 6.11: Verlauf der unteren kritischen Wahrscheinlichkeit für das Auftreten von selbstausgelöster Aktivität (rot) und Beschreibung durch Gleichung (6.12) in blau im Small-World-Graphen (Typ C, $l = 1$, $t_r = 10$) **Links:** Eindimensionaler Fall ($L = 1000$) mit $\langle k_{eff} \rangle_0 = 1$ und $\eta = 1$ (200 Stichproben). **Rechts:** Zweidimensionaler Fall ($L = 100$) mit $\langle k_{eff} \rangle_0 = 2,185$ und $\eta = 0,79$ (100 Stichproben)

ist $\langle k_{eff} \rangle_0 = 2,185$ und $\eta = 0,79$ eine gute Beschreibung des beobachteten Verlaufs (Abb. 6.11).

Eine Frage, die hier nicht untersucht wurde, ist der Zusammenhang von externer und interner Dynamik. Durch die Netzwerkarchitektur wird es zu typischen internen Fluktuationen kommen, gleichzeitig kann aber auch ein externer Einfluß auf die Dynamik bestehen, zum Beispiel durch gezieltes Erregen bestimmter Zellen im Fall von neuronaler Aktivität. Hier wurde nur einmal zu Beginn eine bestimmte Zahl von Zellen erregt. Während bei der Frage nach der oberen Grenze der selbstausgelösten Aktivität nur ein einziger Knoten erregt wurde, wurden an der unteren Grenze 1% der Knoten, gleichverteilt über den Graphen, erregt. Wären nur einzelne Knoten erregt worden, so hätte dies die Wahrscheinlichkeit für das Entstehen selbstausgelöster Aktivität abgesenkt, da von diesem einen Knoten aus erst eine ausreichend große Zahl von weiteren Knoten hätte erregt werden müssen, was bei der kritischen Wahrscheinlichkeit nur selten der Fall sein wird.

Insgesamt sollte hier aber nicht der Einfluß einer externen Dynamik untersucht werden. Von ARGOLLO DE MENEZES und BARABÁSI (2004) wurde allerdings ein Verfahren entwickelt, welches es ermöglicht, externe und interne Dynamik in komplexen Systemen zu unterscheiden.

7 Ausblick

7.1 Blick auf die Neurophysiologie

Was können die Erkenntnisse der Netzwerktheorie zum Verständnis der Vorgänge in Verbänden von Nervenzellen beitragen? Die hier vorgestellten geometrischen und dynamischen Modelle sind ausgesprochen abstrakt, schon deshalb ist ihre Aussagekraft für reale Netzwerke begrenzt. Die Fähigkeit Oszillationen auszubilden ist jedoch ein viel beachteter Ansatz für das Verständnis neuronaler Netze (GLASS 2001; BUZSÁKI und DRAGUHN 2004). Um die Aktivität von Nervenzellen zu erfassen, sind erfolgreiche Modelle entwickelt worden, wie das Hodgkin-Huxley-Modell, das seinerseits immer noch eine starke Vereinfachung darstellt und bereits auf verschiedenen Netzwerktypen untersucht wurde (SHIN und KIM 2004; LAGO-FERNÁNDEZ et al. 2000). Ein weiterer Aspekt, der mit zunehmendem Aufwand berücksichtigt werden könnte ist die zeitliche Entwicklung der Geometrie durch Lernvorgänge.

Die Frage, welche Geometrie die Synapsen, Gap Junctions und Axone in den verschiedenen Teilen der Gehirne von Tieren und Menschen bilden, ist mit dem bisherigen Material nicht abschließend zu beantworten – abgesehen von einigen Ausnahmen wie dem schon erwähnten Nematodenwurm *Caenorhabditis elegans*. Dennoch haben in den letzten Jahren vermehrt auch Biologen, Physiologen und Mediziner auf die Ergebnisse der Netzwerktheorie zurückgegriffen, um die Funktionsweise neuronaler Strukturen zu erklären (SHIN und KIM 2004; KNIGHT 2002; WHITTINGTON et al. 2000). Es wurde auch auf Ähnlichkeiten zwischen dem Informationsfluß im Internet und dem autonomen Nervensystem hingewiesen (FUKUDA et al. 2003).

Bei der Erforschung des Gehirns tauchte die Frage auf, wie neuronale Strukturen das Dilemma lösen zwischen der Funktionalität einerseits und den physischen Anforderungen, die beispielsweise eine beliebig aufwendige Verbindungsarchitektur wegen mangelnden Platzes verbietet: Bei regelmäßigen Verbindungen, wie bei einem Gitter, werden die Laufzeiten von Erregungsmustern zu groß, um den biologischen Anforderungen gerecht zu werden. Andererseits wird eine Geometrie, die einem Zufallsgraphen ähnelt, einen großen Anteil an langen Verbindungen¹² aufweisen, was unter ökonomischen Gesichtspunkten umständlich ist. BUZSÁKI et al. (2004) machten darauf aufmerksam, daß dieser Konflikt durch eine Small-World-Architektur gelöst wer-

¹²Offensichtlich ist jede Nervenstruktur in eine dreidimensionale Geometrie eingebettet. Nimmt man an, daß die Verbindungen zweier Nervenzellen unabhängig von deren geometrischem Abstand auftritt, so treten gleichermaßen Verbindungen aller Längen in der Einbettungsgeometrie auf.

den kann. Als weiteren Aspekt in diesem Umfeld weisen sie auf die Entwicklung unterschiedlicher Zelltypen hin.

In den Modellen aus Kapitel 6 gibt es nur einen Zelltyp nämlich erregende Zellen. Für das Ausbilden von Schwingungen ist aber auch ein hemmender Einfluß nötig, der in den besprochenen Fällen in der Refraktärphase besteht. Die Hemmung genau der gerade aktiven Zellen ist freilich eine starke Vereinfachung. Aus der Neurophysiologie wird hingegen die Bedeutung verschiedener Zelltypen für die Leistungsfähigkeit von neuronalen Strukturen betont. WHITTINGTON et al. (2000) weisen darauf hin, daß in Abwesenheit von hemmenden Neuronen nur eine einzige Frequenz für mögliche Schwingungen auftritt.

Der Kortex von Säugetieren besteht aus zwei Zelltypen: erregenden (*exzitatorischen*) Zellen und hemmenden (*inhibitorischen*) Interneuronen. Letztere können wiederum nach Erscheinung und Funktion in verschiedene Gruppen unterteilt werden. Eine allgemein anerkannte Einteilung der Interneuronen gibt es bislang nicht. Allerdings glauben BUZSÁKI et al. (2004), daß diese Vielfalt von Interneuronen Ausdruck eines Kompromisses zwischen Verbindungsökonomie und funktioneller Leistungsfähigkeit sei. Sie vermuten, daß einige Interneuronen mit langreichweitigen Axonen die Funktion der Reduzierung der Laufzeiten übernehmen – vergleichbar den Fernverbindungen im Small-World-Modell. Wesentlich für diese Idee war die Feststellung, daß bereits eine sehr kleine Zahl solcher Fernverbindungen genügt, um eine Synchronisation der Netzwerkarchitektur in kurzer Zeit zu ermöglichen. Die Tatsache, daß die Zahl solcher Verbindungen bei großen Netzwerken sehr klein (verglichen mit der Gesamtgröße) sein kann, erschwere möglicherweise sehr ihren Nachweis, führen sie weiter aus.

Beim Studium des Hodgkin-Huxley-Modells auf Small-World-Netzwerken berichten LAGO-FERNÁNDEZ et al. (2000) davon, daß nur dieser Netzwerktyp die Ausbildung kohärenter Schwingungen mit kurzen Antwortzeiten – kurze Zeiten zum Einschwingen auf den stationären Zustand – verbindet. Als Beispiel solcher Eigenschaften in der Natur führen sie den Riechlappen der Wanderheuschrecke an, der die erste Verarbeitung der Informationen des Geruchssinns vornimmt, bevor diese an weitere Teile des Gehirns weitergegeben werden.

Ein weiteres Beispiel für Netzwerkaktivität ist das olfaktorische System des Zebrafisches. Auch hier wird eine Oszillation der erregenden Zellen bei einer festen Frequenz beobachtet (FRIEDRICH und LAURENT 2004).

Insgesamt sind die hier vorgestellten Überlegungen und Modelle noch zu abstrakt und vereinfacht, um eine Anwendung auf biologische Netzwerke zu ermöglichen.

7.2 Abschlußdiskussion

In der vorliegenden Diplomarbeit wurden verschiedene Modelle zur Beschreibung von Netzwerktopologien vorgestellt. Während Zufalls- und skalenfreie Graphen keinen intrinsischen Bezug zu einer Einbettungsgeometrie haben, erfüllen Small-World-Graphen diese Anforderung. Räumliche Graphen berücksichtigen zudem die Kosten bei der Konstruktion eines Netzwerkes. Hierarchische Graphen verfügen zwar als Erweiterung des skalenfreien Modells nicht über eine vorgegebene Einbettungsgeometrie, weisen aber modulare Strukturen und Gliederung auf verschiedenen Ebenen auf, so daß zu erwarten ist, daß sie bei der Untersuchung des Zusammenhangs von Funktionalität und Netzwerkarchitektur einen Anstoß geben können.

Das Small-World Modell auf ein- und zweidimensionalen Grundgittern wurde untersucht. Für die Verteilung der Minimalabstände wurde ein Iterationsansatz vorgestellt, der nicht von der Dimension des Grundgitters abhängt und in den untersuchten Fällen mit einer und zwei Dimensionen über einen großen Parameterbereich sehr gute Übereinstimmung mit den Ergebnissen der Simulation zeigt. Darauf basierend wurde die Möglichkeit diskutiert, zu einem Kontinuumsmodell überzugehen. Wesentlich für das Small-World-Modell ist dabei die Zahl der Fernverbindungen. Denn sobald die Zahl der Knoten L^d deutlich über der Zahl der Enden von Fernverbindungen $2M$ liegt, dominieren die Fernverbindungen die globalen Eigenschaften des Graphen. Um das topologische Verhalten des Graphen im Limes zu erhalten, wird er deswegen durch eine Vergrößerung der Knotendichte des Grundgitters erzielt, die die Zahl und Platzierung der Fernverbindungen nicht berührt. Ein allgemeinerer Skalenansatz berücksichtigte auch das Skalenverhalten des Graphen für große Zahlen von Fernverbindungen, wobei jedoch stets die Knotenzahl größer als die Zahl der Fernverbindungen sein muß.

Dynamik auf Netzwerken kam im Kapitel 6 zur Sprache. Die Bedeutung der Perkolationstheorie wurde herausgearbeitet. Als dynamische Modelle wurden besonders das SI- und SIRS-Modell diskutiert. Für das SI-Modell konnte eine Näherung in gewissen Grenzen gefunden werden. Vor allem ist aber der Mechanismus, der zu einer reduzierten Zahl von Fernverbindungen führt noch nicht verstanden. In zwei Dimensionen bleibt zusätzlich das SI-Problem auf dem regulären Gitter zu lösen.

Das SIRS-Modell wurde in einer modifizierten Form auf Basis von Simulationen untersucht und der Parameterbereich ermittelt, in dem es zu selbstausgelöster Aktivität kommt. Die Grenzen dieses Bereich konnten in Ansätzen berechnet werden, ein umfassendes quantitatives Verständnis steht jedoch noch aus.

Literaturverzeichnis

- AGIZA, H. N., A. S. ELGAZZAR und S. A. YOUSSEF (2003). *Phase transitions in some epidemic models defined on small-world networks*. Vorabdruck. cond-mat/0301004.
- ALBERT, R. und A.-L. BARABÁSI (2002). *Statistical Mechanics of Complex Networks*. Rev. Mod. Phys., **74** S.47. cond-mat/0106096.
- ALMAAS, E. und A.-L. BARABÁSI (2004). *Power laws in biological networks*. In: KOONIN, E. [Hrsg.]: *Power laws, scalefree networks and genome biology*. Landes biosciences. q-bio.MN/0401010.
- ALMAAS, E., R. V. KULKARNI und D. STROUD (2002). *Characterizing the Structure of Small-World Networks*. Phys. Rev. Lett., **88** S.098101. cond-mat/0109227.
- ALMAAS, E., R. V. KULKARNI und D. STROUD (2003). *Scaling Properties of random walks on small-world networks*. Phys. Rev. E, **68** S.056105. cond-mat/0306382.
- AMARAL, L. A. N. und J. M. OTTINO (2004). *Complex networks: Augmenting the framework for the study of complex systems*. Europ. Phys. J. B, **38** S.147–162.
- AMARAL, L. A. N., A. SCALA, M. BARTHÉLÉMY und H. E. STANLEY (2000). *Classes of small-world networks*. Proc. Natl. Acad. Sci. USA, **97**(21) S.11149. www.pnas.org/cgi/doi/10.1073/pnas.200327197.
- BARABÁSI, A.-L. und R. ALBERT (1999). *Emergence of scaling in random networks*. Science, **286** S.509. cond-mat/9910332.
- BARRAT, A. (1999). *Comment on "Small-world networks: Evidence for a crossover picture"*. e-Druck. cond-mat/9903323.
- BARRAT, A. und M. WEIGT (1999). *On the properties of small-world network models*. Europ. Phys. J. B, **13** S.547. cond-mat/9903411.
- BARTHÉLÉMY, M. und L. A. N. AMARAL (1999). *Small-World Networks: Evidence for a Crossover Picture*. Phys. Rev. Lett., **82**(15) S.3180–3183. Erratum in Phys. Rev. Lett. **82**(25) 1999, S.5280.
- BOLLOBÁS, B. (1998). *Modern Graph Theory*, Bd. **184** d. Reihe *Graduate Texts in Mathematics*. Springer, New York.
- BOLLOBÁS, B. (2001). *Random Graphs*, Bd. **73** d. Reihe *Cambridge studies in advanced mathematics*. Cambridge University Press.

- BUZSÁKI, G. und A. DRAGUHN (2004). *Neural Oscillations in Cortical Networks*. Science, **304** S.1926–1929.
- BUZSÁKI, G., C. GEISLER, D. A. HENZE und X.-J. WANG (2004). *Interneuron Diversity series: Circuit complexity and axon wiring economy of cortical interneurons*. Elsevier Trends in Neurosci., **27**(4) S.186–193.
- CLAUSET, A., M. E. J. NEWMAN und C. MOORE (2004). *Finding community structure in very large networks*. Vorabdruck. cond-mat/0408187.
- DEZSÓ, Z. und A.-L. BARABÁSI (2002). *Halting viruses in scale-free networks*. Phys. Rev. E, **65** S.0055103.
- DOROGOVTSSEV, S. N. und J. F. F. MENDES (1999). *Exactly solvable analogy of small-world networks*. e-Druck. cond-mat/9907445.
- DOROGOVTSSEV, S. N. und J. F. F. MENDES (2001). *Scaling properties of scale-free evolving networks: Continuous approach*. Phys. Rev. E, **63**. cond-mat/0012009.
- DOROGOVTSSEV, S. N. und J. F. F. MENDES (2002). *Evolution of networks*. Advances in Physics, **51** S.1079. cond-mat/0106144.
- EULER, L. (1736). *Solutio problematis ad geometriam situs pertinentis*. In: *Commentarii Academiae Scientiae Petropolitanae*, Nr. 8. S. 128–140. (=Opera omnia. Ser. I, Vol. 7, 1766, S.1–10).
- FRIEDRICH, R. W. und G. LAURENT (2004). *Dynamics of Olfactory Bulb Input and Output Activity During Odor Stimulation in Zebrafish*. J. Neurophysiol., **91** S.2658–2669.
- FUKUDA, K., L. A. N. AMARAL und H. E. STANLEY (2003). *Similarities between communication dynamics in the Internet and the autonomic nervous system*. Europhys. Lett., **62**(2) S.189–195.
- GASTNER, M. T. und M. E. J. NEWMAN (2004a). *Shape and efficiency in spatial distribution networks*. Vorabdruck. cond-mat/0409702.
- GASTNER, M. T. und M. E. J. NEWMAN (2004b). *The spatial structure of networks*. Vorabdruck. cond-mat/0407680.
- GLASS, L. (2001). *Synchronisation and rhythmic processes in physiology*. Nature, **410**(14) S.277–284.
- HASTINGS, M. B. (2003). *Mean-Field and Anomalous Behavior on a Small-World Network*. Phys. Rev. Lett., **91** S.098701. cond-mat/0304530.
- KAROŃSKI, M. und A. RUCIŃSKI (1997). *The Origins of the Theory of Random Graphs*. In: GRAHAM, R. L. und J. NEŠETŘIL [Hrsg.]: *The*

- mathematics of Paul Erdős*, Nr. 13 in *Algorithms and Combinatorics*. Springer, Berlin, S. 311–336.
- KLEINBERG, J. M. (1999). *The small-world phenomenon: An algorithmic perspective*. Technischer Bericht 99-1776, Cornell University Computer Science Departement. <http://www.cs.cornell.edu/home/kleinber/swn.pdf>.
- KLEINBERG, J. M. (2000). *Navigation in a small world*. *Nature*, **406** S.845. <http://www.cs.cornell.edu/home/kleinber/Nat00.pdf>.
- KLEINBERG, J. M. (2001). *Small-World Phenomena and the Dynamics of Information*. *Adv. in Neural Inf. Process. Syst.*, (14). <http://www.cs.cornell.edu/home/kleinber/Nips.pdf>.
- KLEINBERG, J. M. und S. LAWRENCE (2001). *The Structure of the Web*. *Science*, **294** S.1849f.
- KLEMM, K. und V. M. EGUÍLUZ (2002). *Highly clustered scale-free networks*. *Phys. Rev. E*, **65** S.036123. cond-mat/0107606.
- KLEMM, K., V. M. EGUÍLUZ, R. TORAL und M. S. MIGUEL (2003). *Nonequilibrium transitions in complex networks: a model of social interaction*. *Phys. Rev. E*, **67** S.026120. cond-mat/0210542.
- KNIGHT, J. (2002). *Bridging the culture gap*. *Nature*, **419** S.244–246.
- KOZMA, B., M. B. HASTINGS und G. KORNISS (2004). *Testing the Collective Properties of Small-World Networks through Roughness Scaling*. *Phys. Rev. Lett.*, **92** S.108701. cond-mat/0309196.
- LAGO-FERNÁNDEZ, L. F., R. HUERTA, F. CORBACHO und J. A. SIGÜENZA (2000). *Fast Response and Temporal Coherent Oscillations in Small-World Networks*. *Phys. Rev. Lett.*, **84**(12) S.2758–2761.
- LI, C. und G. CHEN (2003). *Stability of a neural network model with small-world connections*. *Phys. Rev. E*, **68** S.052901.
- MARCHIORI, M. und V. LATORA (2000). *Harmony in the small-world*. *Physica A*, (285) S.539–546.
- MATTHÄUS, F. (2004). *The SI-Model for Infection on Networks*. Technischer Bericht, Interdisciplinary Centre for Mathematical and Computational Modelling, Universität Warschau.
- MENEZES, M. ARGOLLO DE und A.-L. BARABÁSI (2004). *Separating internal and external dynamics of complex systems*. Vorabdruck. cond-mat/0406421.

- MENEZES, M. ARGOLLO DE, C. F. MOUKARZEL und T. J. P. PENNA (2000). *First-order transition in small-world networks*. Europhys. Lett., **50**(574). cond-mat/9903426.
- MILGRAM, S. (1967). *The Small World Problem*. Psychology Today, **2**.
- MONASSON, R. (1999). *Diffusion, localization and dispersion relations on "small-world" lattices*. Europ. Phys. J. B, **12** S.555–567. cond-mat/9903347.
- MOORE, C. und M. E. J. NEWMAN (2000). *Epidemics and percolation in small-world networks*. Phys. Rev. E, **61** S.55678–55682. Santa Fe Institute working paper 00-01-002; cond-mat/9911492.
- MOORE, C. und M. E. J. NEWMAN (2002). *Exact solution of site and bond percolation on small-world networks*. Phys. Rev. E, **62**(14) S.7059–7064. Santa Fe Institute working paper 00-01-007; cond-mat/0001393.
- MORELLI, L. G., G. ABRAMSON und M. N. KUPERMAN (2004). *Associative memory on a small-world neural network*. Eur. Phys. J. B, **38** S.495–500. nlin.AO/0310033.
- MOUKARZEL, C. F. (1999). *Spreading and shortest paths in systems with sparse long-range connections*. Phys. Rev. E, **60** S.6263–6266. cond-mat/9905322.
- MOUKARZEL, C. F. und M. ARGOLLO DE MENEZES (1999). *Infinite Characteristic Length in Small-World Systems*. e-Druck. cond-mat/9905131.
- NEWMAN, M. E. J. (2000). *Models of the Small World*. J. Stat. Phys., **101** S.819–841. Santa Fe Institute working paper 99-12-080; cond-mat/0001118.
- NEWMAN, M. E. J. (2004). *Analysis of weighted networks*. Vorabdruck. cond-mat/0407503.
- NEWMAN, M. E. J., I. JENSEN und R. M. ZIFF (2002). *Percolation and epidemics in a two-dimensional small world*. Phys. Rev. E, **65** S.021904. cond-mat/0108542.
- NEWMAN, M. E. J., C. MOORE und D. J. WATTS (2000). *Mean-Field Solutions of the Small-World Network Model*. Phys. Rev. Lett., **84**(14) S.3201–3204. Der Artikel ist mit einem zusätzlichen Anhang verfügbar unter cond-mat/9909165.
- NEWMAN, M. E. J., S. H. STROGATZ und D. J. WATTS (2001). *Random graphs with arbitrary degree distributions and their applications*. Phys. Rev. E, **64** S.026118. Santa Fe Institute working paper 00-07-042; cond-mat/0007235.

- NEWMAN, M. E. J. und D. J. WATTS (1999a). *Renormalisation group analysis of the small-world network modell*. Phys. Lett. A, **263** S.341. cond-mat/9903357.
- NEWMAN, M. E. J. und D. J. WATTS (1999b). *Scaling and Percolation in the small-world network modell*. Phys. Rev. E, **60** S.7332–7342. cond-mat/9904419.
- PANDIT, S. A. und R. E. AMRITKAR (1999). *Characterization and control of small-world networks*. e-Druck. chao-dyn/9901017.
- PARK, J. und M. E. J. NEWMAN (2004). *The statistical mechanics of networks*. Vorabdruck. cond-mat/0405566.
- PASTOR-SATORRAS, R. und A. VESPIGNANI (2001). *Epidemic dynamics and endemic states in complex networks*. Phys. Rev. E, **63** S.066117.
- RAVASZ, E. und A.-L. BARABÁSI (2003). *Hierarchical organization in complex networks*. Phys. Rev. E, **67** S.026112.
- RAVASZ, E., A. L. SOMERA, D. A. MONGRU, Z. N. OLTIVAI und A.-L. BARABÁSI (2002). *Hierarchical Organization of Modularity in Metabolic Networks*. Science, **297** S.1551–1555.
- REDNER, S. (1998). *How Popular is Your Paper? An Empirical Study of the Citation Distribution*. Europhys. J. B, **4** S.131. cond-mat/9804163.
- ROXIN, A., H. RIECKE und S. A. SOLLA (2003). *Self-sustained activity in a small-world network of excitable neurons*. Phys. Rev. Lett.
- SCHWABL, F. (2000). *Statistische Mechanik*. Springer, Berlin.
- SHIN, C.-W. und S. KIM (2004). *Self-organized Criticality and Scale-free Properties in Emergent Functional Neural Networks*. Vorabdruck. cond-mat/0408700.
- STROGATZ, S. H. (2001). *Exploring complex networks*. Nature, **410** S.268–276.
- VÁZQUEZ, A., R. PASTOR-SATORRAS und A. VESPIGNANI (2002). *Large-scale topological and dynamical properties of Internet*. Phys. Rev. E, **65** S.066130. cond-mat/0112400.
- VÁZQUEZ, A., R. DOBRIN, D. SERGI, J.-P. ECKMANN, Z. N. OLTIVAI und A.-L. BARABÁSI (2004). *The topological relationship between large-scale attributes and local interaction patterns of complex networks in cellular networks. Supplementary material*. Vorabdruck. cond-mat/0408431.

- WARREN, C. P., L. M. SANDER und I. M. SOKOLOV (2001). *Firewalls, Disorder, and Percolation in Epidemics*. e-Druck.
- WATTS, D. J. (2003). *Small Worlds : The Dynamics of Networks between order and randomness*. Princeton University Press.
- WATTS, D. J. und S. H. STROGATZ (1998). *Collective dynamics of 'small-world' networks*. Nature, **393** S.440–442.
- WHITTINGTON, M. A., R. D. TRAUB, N. KOPELL, B. ERMENTROUT und E. H. BUHL (2000). *Inhibition-based rythms: Experimental and mathematical observations on network dynamics*. Int. J. Psychophysiol., **38** S.315–336. <http://math.bu.edu/INDIVIDUAL/nk/papers/IJPrev/IJPrev.html>.

Stichwortverzeichnis

- Baum, 15
 minimaler, 35
 Bethe-Gitter, 57
 bevorzugtes Verbinden, 30, 32
 Binomialmodell, 13, 39
 Bollobás, Béla, 13, 15
- Caenorhabditis elegans, 10, 76
 Cayley-Baum, 57
 charakteristische Weglänge, 5
 Cliquenkoeffizient, 5, 33
- effektive Länge, 34
 Einbettungsgeometrie, 6, 9, 12, 13, 18,
 46, 76
 Erdős, Paul, 1, 2, 13, 14
 erzeugende Funktion, 58
 Escherichia coli, 10
 euklidischen Abstand, 6
 Euler, Leonhard, 1
- Fernverbindungen, 18
- Gilbert, E. N., 13
 Gitterabstand, 18
 Graph, 4
 bipartiter, 7
 hierarchischer, 33
 räumlicher, 34
 sternförmiger, 35
- Internet, 8, 76
- Kante, 4
 Knoten, 4
- Leibniz, Gottfried W. Frhr. von, 1
 Listing, Johann Benedikt, 1
- Milgram, Stanley, 1, 2
 Minimalabstand, 4
 Modularität, 33
 Molekularfeldnäherung, 3, 40, 49, 68
- Nachbarschaft, 5
- Netzwerk
 metabolisches, 10
 neuronales, 10, 76
- Perkolation, 14, 57
 Phasenübergang, 26–28, 57
- Rényi, Alfréd, 1, 2, 14
 Renormalisierung, 21, 26, 27
- selbstaugelöste Aktivität, 71, 72
 SI-Modell, 65
 SIR-Modell, 70
 SIRS-Modell, 71
 SIS-Modell, 68
 skalenfreier Graph, 30
 charakteristische Weglänge, 32
 Cliquenkoeffizient, 32
 Gradverteilung, 31
 Small-World-Graph, 17, 76
 charakteristische Weglänge, 44
 Cliquenkoeffizient, 20
 Gradverteilung, 21
 Perkolation, 62
 Smallest-World-Graph, 23
- totalverbunden, 4, 17, 33
- ungerichtet, 4
 Untergraph, 5, 61
- Verbindung, 4
 Verknüpfungsgrad, 5
 vollständig, 15
- Zufallsgraph, 1, 13
 charakteristische Weglänge, 17
 Cliquenkoeffizient, 17
 exponentieller, 36
 Gradverteilung, 16
 Perkolation, 59
 Untergraph, 15
 verallgemeinerter, 17
- Zykel, 14, 15

Erklärung

Ich versichere, daß ich diese Arbeit selbstständig verfaßt und keine anderen als die angegebenen Quellen und Hilfsmittel benutzt habe.

Heidelberg, am 30. Januar 2005

Thomas Neusius