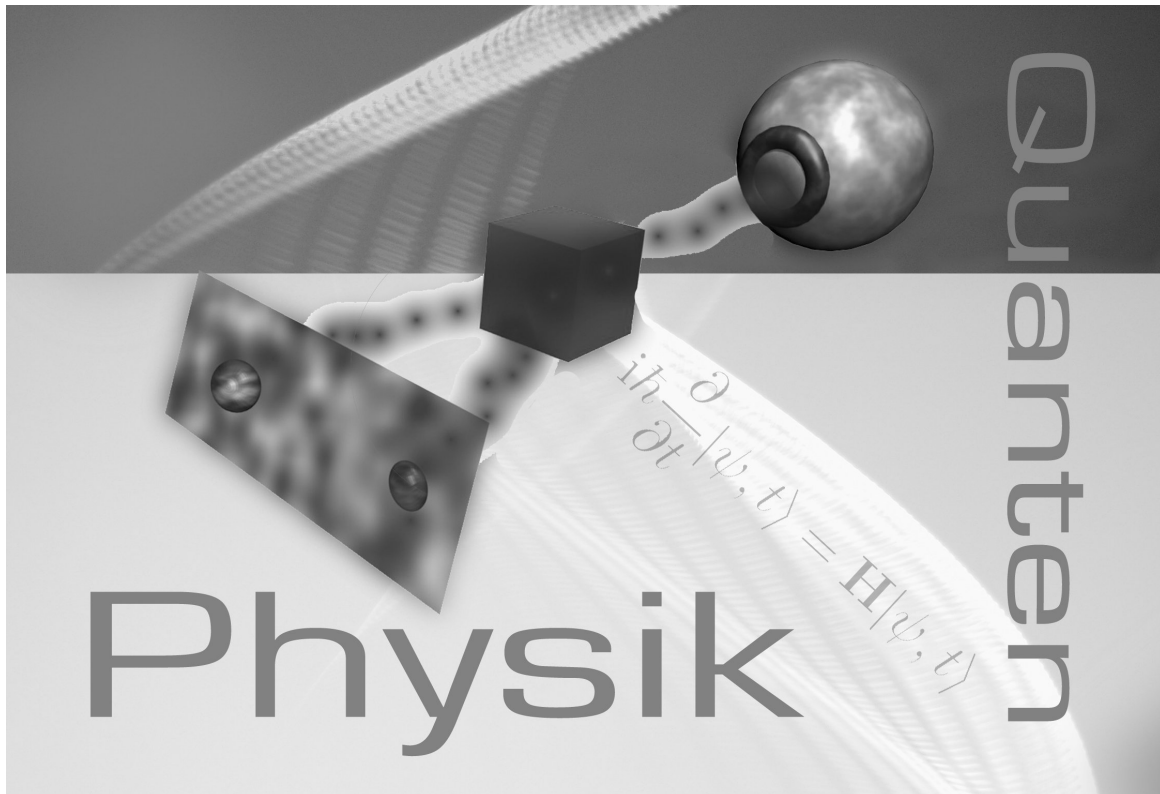


# Inhaltsverzeichnis

<b>Kurs 2.1 – Quanten: Mathematik und Philosophie einer physikalischen Idee</b>	<b>2</b>
1 Aus der Kursbeschreibung	2
2 Vorwort	3
2.1 Einleitung	3
3 Philosophische Grundlagen	3
3.1 Positivismus	3
3.2 Operationalismus	5
3.3 Popper	5
3.4 Kuhn	5
4 Mathematische Grundlagen	6
4.1 Die komplexen Zahlen	6
4.2 Vektorräume	6
4.3 Skalarprodukt	7
4.4 Basen	7
4.5 Matrizen und Operatoren	7
5 Der Stern-Gerlach-Versuch	9
6 Axiome der Quantenmechanik	10
7 Das Stern-Gerlach-Experiment in der Quantenmechanik	12
8 Heisenbergsche Unschärferelation	13
9 Verschränkung	14
10 Einstein-Podolski-Rosen-Experiment	14
10.1 Gedankenexperiment	15
10.2 Quantenmechanische Deutung des Experiments	15
10.3 Erklärung von Einstein, Podolski und Rosen	15
11 Bellsche Ungleichungen	16
11.1 Bells Argumentation	16
11.2 Quantenmechanische Behandlung	16
12 Kopenhagener Deutung, Messproblem, Kollaps	17
12.1 Messproblem	18
12.2 Was genau ist eine Messung?	18
13 Viele-Welten- und Viele-Bewusstseins-Theorien	18
14 Putnam – ein Philosoph schaut auf die Quantenmechanik	19
Literaturverzeichnis	20

# Quanten: Mathematik und Philosophie einer physikalischen Idee



## 1 Aus der Kursbeschreibung

Die Quantentheorie ist die dominierende Theorie der zeitgenössischen Physik. Allerdings steht die Quantentheorie neben der Relativitätstheorie immer noch symbolisch für eine verrückte Idee, die nur wenigen Eingeweihten zugänglich sei. In der Tat handelt es sich bei der Quantenphysik um ein stark mathematisiertes Gebiet, denn nur die Mathematik gibt uns eine Sprache, mit der Quantenphänomene überhaupt beschrieben werden können.

Die Theorie scheint gut zu beschreiben, was wir beobachten. Dies ist jedoch oft so überraschend, dass ihre Interpretation große Verunsicherungen darüber hervorruft, was wirklich ist. Sehr grundlegende Annahmen gerieten angesichts der experimentellen Bestätigung der Quantentheorie ins Wanken. Die Quantentheorie zwingt uns, über das Verhältnis zwischen unseren Beobachtungen, deren Beschreibungen in mathematischer Formulierung und der Realität an sich neu nachzudenken.

Ziel des Kurses ist es, eine Einführung in den Formalismus der Quantenmechanik zu geben und deutlich zu machen, welche Schwierigkeiten dabei auftreten. Kontrastierend zur klassischen Physik werden die Ideen der Quantenmechanik anhand von Zwei-Zustandssystemen wie dem Stern-Gerlach-Versuch diskutiert. Dies wird die Motivation liefern für die Aufstellung von Postulaten, die den mathematischen Formalismus der Theorie bestimmen. Dazu werden Konzepte wie Vektor- und Hilbertraum, Matrizen- und Operatorenkalkül eingeführt. Soweit es der Kursverlauf zulässt, werden die entsprechenden Zusammenhänge exakt bewiesen werden. Der Begriff der Messung wird erläutert, ebenso der der Verschränkung, um anhand der Bellschen Ungleichungen die Folgerungen der Postulate (Nichtlokalität) zu veranschaulichen.

Während des gesamten Kurses werden die erkenntnis- und wissenschaftstheoretischen Herausforderungen der Quantenmechanik im Blick behalten und die verschiedenen Einwände diskutiert. Alternative Interpretati-

onsmöglichkeiten auch jenseits der Kopenhagener Deutung werden zur Sprache kommen. Mit ausgewählten Texten werden Teilaspekte der Quantentheorie er-

schlossen, die in Kleingruppen bearbeitet und den anderen Teilnehmern vorgestellt werden.

## 2 Vorwort

(Christian Ströbele und Thomas Neusius)

*„Es gab eine Zeit, als Zeitungen sagten, nur zwölf Menschen verstünden die Relativitätstheorie. Ich glaube nicht, dass es jemals eine solche Zeit gab. Auf der anderen Seite denke ich, es ist sicher zu sagen, niemand versteht die Quantenmechanik.“*

RICHARD FEYNMAN

Über zwei Wochen haben wir uns mit der Quantenphysik beschäftigt. Dazu haben wir die mathematischen Grundlagen erarbeitet und gesehen, wie die Physik ausgehend von wenigen Grundannahmen die Natur beschreibt. Anschließend haben wir uns den verschiedenen Interpretationen genähert und gesehen, welche Konsequenzen die Philosophie aus den Entdeckungen der Quantenphysik gezogen hat.

Der deduktive Zugang zum Thema lag uns dabei sehr am Herzen. Dafür mussten wir in Kauf nehmen, dass zu Beginn nicht erkennbar war, welchen Zweck die umfangreiche Mathematik hat, die wir in kurzer Zeit vermittelt haben. Der Verzicht auf anschauliche Beispiele und Analogien, wie sie sowohl im Unterricht als auch in den meisten populärwissenschaftlichen Büchern zu finden sind, hatte aus unserer Sicht den Vorzug, direkt deutlich zu machen, dass eine quantenmechanische Beschreibung auf Begriffe der Alltagserfahrung weitgehend verzichten muss. Im Rahmen der Mathematik ist eine ausgesprochen exakte Beschreibung dessen möglich, was experimentell beobachtet werden kann. Manche Schwierigkeiten, wie der sogenannte „Welle-Teilchen-Dualismus“, verlieren in diesem Kontext ihre Bedeutung. Wir glauben, dass ohne die Abstraktion der mathematischen Formulierung ein Zugang zu den Kernproblemen der Quantenmechanik unmöglich ist.

Es hat uns viel Freude bereitet, zu sehen, dass die Teilnehmer unseres Kurses sich durch den zu Beginn steinigen Weg zur Quantenmechanik nicht haben abschrecken lassen und immer mit großer Motivation und viel

Enthusiasmus mitgearbeitet haben. Engagierte Diskussionen zum Thema haben sich immer wieder ergeben und gezeigt, dass den Teilnehmern das Thema auch aus philosophischer Sicht wichtig war. Sowohl an den physikalischen als auch an den philosophischen Aspekten bestand großes Interesse. Mehrfach mussten wir deswegen über unser vorbereitetes Programm hinaus zusätzliches Material zur Verfügung stellen.

Der Kurs hat uns sehr viel Spaß gemacht und wir möchten Euch, den Teilnehmerinnen und Teilnehmern, an dieser Stelle nochmals herzlich danken, für die erfüllten 17 Tage, die wir mit Euch verbringen durften!!!

### 2.1 Einleitung

Der Dokumentationsbeitrag gliedert sich in vier Teile. Im ersten Teil (Abs. 1.3) werden einige philosophische – insbesondere die Erkenntnistheorie betreffende – Grundpositionen geklärt, die im Rahmen der Quantenmechanik von besonderer Bedeutung sind. Im zweiten Teil (Abs. 1.4) erläutern wir die mathematischen Begriffe, die in der Quantenmechanik verwendet werden. Der dritte Teil (Abs. 1.5–1.11) stellt ausgehend von einer Diskussion des Stern-Gerlach-Versuches die Axiome der Quantenmechanik vor und zeigt, wie mit diesen eine Beschreibung der experimentellen Ergebnisse ermöglicht wird. Im letzten Teil (Abs. 1.12–1.14) werden verschiedene Vorschläge zur Interpretation der Quantenmechanik vorgestellt.

## 3 Philosophische Grundlagen

(Sylvio Donner, Marco Aliprandi, Erich Schröder)

### 3.1 Positivismus

Der Begriff *Positivismus* stammt vom lateinischen Verb *ponere*, was setzen oder vorsetzen bedeutet und hier im Sinne von „durch Sinnesdaten gegeben“ verwendet

wird. Man versteht unter Positivismus eine naturwissenschaftlich-philosophische Position, die im 19. und am Anfang des 20. Jahrhunderts viele Anhänger zählte. Sie hat im Empirismus und in der Aufklärungsphilosophie und deren Idealbild des Menschen ihre Wurzeln.



Abb. 1.1: Kurs 2.1 – Quanten: Mathematik und Philosophie einer physikalischen Idee

Dieser Mensch verfügt über eine naturwissenschaftliche Denkart und wirft einen objektiven Blick auf die Welt und deren Phänomene und hält nur das für wahr, was tatsächlich überprüft werden kann. Die Skepsis gegenüber spekulativen Theorien ist, den Positivisten zufolge, keineswegs für die Entwicklung der Menschheit einschränkend, sondern ermöglicht direkte und indirekte Fortschritte, insbesondere was die technologische Entwicklung und die Wissenserweiterung betrifft, sowie Bedürfnisbefriedigung der Menschen. In dieser Entwicklung seien rein spekulative Ideen oder Theorien nur störend, da sie keine logische oder empirisch prüfbar Grundlage haben und für die Menschheit keine positiven Folgen haben können.

Die Entwicklung des Positivismus ist tief mit der gesellschaftlichen und wissenschaftlichen Entwicklung verknüpft. Die Basis für diese Schule wurde am Anfang des 19. Jahrhunderts vom französischen Philosophen Auguste Comte entwickelt. In mehreren Werken schildert er seine Auffassung der Wissenschaften: es bestehe eine klar definierte Hierarchie der Wissenschaften, die von der Mathematik an der Spitze bis zur Soziologie am untersten Rang reicht und die zu einer Gesamtansicht der Welt führen sollte. Die Aufgabe des Philosophen sei, als allwissende Gestalt die Entwicklung der Wissenschaft und deren Experimente und Schlussfol-

gerungen zu kontrollieren. Der Philosoph sollte sich so von rein spekulativen Beschäftigungen lösen und sich der Erfahrung widmen. Fragen wie die der Erstursache und der Letztbestimmung werden als sinnlos eingestuft. Diese Auffassung hat auch eine politische Dimension: Durch die Lehre des logischen Denkens dem Volk den Sinn für ein demokratisches Staatswesen zu vermitteln. Im 20. Jahrhundert nahm der Positivismus eine neue Form an, die logischer Positivismus genannt wird. Der logische Positivismus erkennt nur diejenigen Sätze als wahr an, die entweder durch direkte Beobachtungen verifiziert werden können oder durch analytische Beziehungen wahr sind.

Der logische Positivismus führt aber zu manchen Widersprüchen und grundsätzlichen Problemen. Oft handelt es sich bei Experimenten darum, eine Interpretation der Ergebnisse zu liefern und jede Interpretation ist theoriegetränkt. Außerdem gibt es Fälle, wo es unvermeidbar ist, sich im Gebiet der reinen Theorie zu bewegen, wie im Falle der Quantenmechanik. Im Gegensatz zu dem, was seine Anhänger behaupten, begrenzt und lähmt der Positivismus die Wissenserweiterung. Ein Beispiel sind die Fortschritte in der Chemie. Die Positivisten leugneten lange Zeit die Existenz der Atome, weil noch kein Versuch ihre Existenz bewiesen hatte. Als Albert Einstein das vom schottischen

Botaniker Robert Brown durchgeführten Experiment (Pollen, die im Wasser gegen Wassermoleküle stoßen und sich deswegen bewegen) modellierte und später die nach Brown benannte Molekularbewegung bewiesen wurde, mussten die positivistischen Chemiker zur Erkenntnis kommen, dass ihre Leugnung der Existenz von Atomen unplausibel wurde.

### 3.2 Operationalismus

Der Operationalismus wurde durch den amerikanischen Physiker Bridgman begründet. Grundlegend dafür ist seine Monographie *The Logic of Modern Physics* [1]. Nach dieser Position ist der Sinn physikalischer Begriffe erschöpfend dadurch definiert, wie ich sie messe.

Ob etwa die Ladung eines Elektrons ein Teil der Realität ist, stellt dem Operationalismus zufolge keine sinnvolle Frage dar. Die Naturwissenschaft sei nichts anderes als eine Menge von Vorschriften und Vorhersagen über die Ergebnisse für die brauchbare Untersuchung im Labor. Die sinnvollen Begriffe sind demnach jene, die durch eine Folge durchführbarer Schritte auf Messungen beziehbar sind. Andere Begriffe wie z. B. mentale Begriffe sind sinnlos. Die Funktion von Theorien sei lediglich, systematische Vorhersagen über die Welt zu ermöglichen, nicht die Welt, wie sie an sich ist, zu beschreiben.

### 3.3 Popper

Dem Verifikationismus setzt der englische Philosoph Sir Karl Raimund Popper (\*1902) das Prinzip des *Falsifikationismus* (lat. falsus: falsch) entgegen [3]. Der Falsifikationismus sagt aus, dass Theorien nicht empirisch bewiesen werden können. Andererseits ist es prinzipiell möglich, eine Theorie durch eine Messung zu falsifizieren, deren Ergebnis im Widerspruch zu dem von der Theorie geforderten Ergebnis steht. Eine Theorie, für die es keine Widerlegungsmöglichkeit gibt, ist nach Popper nicht vertretenswert, da sie keinen empirischen Gehalt hat. Z. B. gilt eine Theorie, die beispielsweise die Existenz von Wesen behandelt, die sich unsichtbar machen, sobald sie angeblickt werden, als nicht vertretenswert. Eine gute Theorie hingegen zeichnet sich durch einen hohen empirischen Gehalt, also ein hohes Falsifizierungspotential aus. Somit ist die Theorie „Ein Apfel fällt auf der Erde nach unten“ schlechter als die Theorie  $F = mg$ . Das Ziel der Wissenschaft muss es sein, Theorien zu falsifizieren (im Falle der Newtonschen Axiome beispielsweise durch die Periheldrehung des Merkur), da aus der Falsifikation ein Erkenntnisgewinn folgt, der zu einer neuen Theorie auf einem höheren Erkenntnisstand führt (allg. Relativitätstheorie). Theorien, die trotz größter Bemühungen nicht widerlegt werden können, können vorerst als gefestigt bezeichnet werden. Der Fallibilismus besagt allerdings, dass wir unserem Wissen gegenüber immer skeptisch sein müssen und darauf eingestellt sein müssen, dass selbst uns fundamental erscheinende Theorien wider-

legt werden. Daher müssen wir auch an gefestigten Theorien zweifeln.

### 3.4 Kuhn

Der amerikanische Wissenschaftshistoriker und Philosoph Thomas S. Kuhn (\*1922) kritisiert sowohl den Positivismus, als auch den Falsifikationismus von Popper [4]. Er führt stattdessen eine eigene These über die Entstehung von Theorien an, die hauptsächlich auf wissenschaftshistorischen Überlegungen basiert. Nach Kuhn gibt es zwei Phasen der wissenschaftlichen Entwicklung: die normalwissenschaftliche Phase und die revolutionäre Phase. In der normalwissenschaftlichen Phase üben die Forscher keine Kritik an einem Paradigma. Stattdessen streben sie nach einer Präzisierung des Paradigmas, etwa um es auf neue Systeme anzuwenden. Treten in dieser Phase Messergebnisse auf, die mit dem Paradigma unvereinbar sind, wird das Ergebnis der Inkompetenz des Forschers zugeschrieben oder als Anomalie gedeutet. Erst ab einer gewissen Anzahl von unvereinbaren Ergebnissen oder besonders schwerwiegenden Missverhältnissen zum Paradigma wird es angezweifelt, was zu einer „wissenschaftlichen Krise“ führt. Schließlich wird ein neues Paradigma entwickelt, das in der „revolutionären Phase“ mit dem alten konkurriert. Das Problem dabei ist, dass ein objektiver Austausch von Argumenten zwischen zwei Wissenschaftlern der unterschiedlichen Lager unmöglich ist, da die Plausibilität eines Arguments von der jeweiligen Sichtweise des Betrachters abhängt und sowohl Pro- als auch Kontraargumente nur abhängig von der jeweiligen Sichtweise überzeugen können. Kuhn bezeichnet dieses Phänomen als Kommunikationsbruch und vergleicht die Durchsetzung eines Paradigmas gegen ein anderes bei einem Wissenschaftler mit einer religiösen Bekehrung. Dabei können Forscher aus eigener Überlegung vom anderen Paradigma überzeugt werden, was allerdings nicht aus einer objektiven Richtigkeit des Paradigmas herrührt, sondern aus der größeren Überzeugungskraft des anderen Lagers (z. B. bessere Rhetorik, größerer Einfluss, höhere Berühmtheit, mehr Forschungsgelder...). Oft jedoch geschieht die „Bekehrung“ aus sozialpsychologischen Gründen, wie Gruppenzwang oder Opportunismus. Das ist auch der elementare Unterschied zu Poppers Theorie. Beide Philosophen kritisieren die verifikationistische These, eine objektive Wahrheit zu kennen. Damit grenzen sie sich klar vom Positivismus und Verifikationismus ab. Popper allerdings nimmt tatsächlich an, dass wir uns auf eine objektive Wahrheit zu bewegen, da wir Theorien nach rationalen Maßstäben falsifizieren. Kuhn dagegen versteht Fortschritt nur im pragmatischen Sinn, der die Welt für uns besser erklärbar macht, da das neue Paradigma die Gründe für die Krise, die aus der Unfähigkeit resultiert, die Welt zu beschreiben, in der Regel ausräumt. Einer objektiven Wahrheit können wir uns allerdings nicht mit Sicherheit auf rein rationalem Wege nähern, weil in unser Bild von der Realität auch z. B. soziale, d. h. irrationale Faktoren eingegangen sind.

## 4 Mathematische Grundlagen

(Anna Schmalen, Noemi Skorzinski, Theodor Fall, Sylvio Donner, Stefan Toman)

### 4.1 Die komplexen Zahlen

Die Menge der komplexen Zahlen – durch das Symbol  $\mathbb{C}$  dargestellt – ist eine Erweiterung zu den reellen Zahlen, so dass nun auch Wurzeln aus negativen Zahlen definiert sind. Hierfür wird die *imaginäre Einheit*  $i$  mit  $i^2 = -1$  eingeführt. Eine komplexe Zahl  $a = (a_1 + ia_2)$  besteht aus einem *Realteil*  $a_1$  und einem *Imaginärteil*  $a_2$ . Die Rechenregeln werden auf die der reellen Zahlen zurückgeführt, wobei die Addition komponentenweise erfolgt und für die Multiplikation definiert wird:

$$ab = (a_1 + ia_2)(b_1 + ib_2) = (a_1b_1 - a_2b_2) + i(a_2b_1 + a_1b_2).$$

Wie sich leicht beweisen lässt, sind Additionen und Multiplikationen auf den komplexen Zahlen ebenso assoziativ und kommutativ wie bei den reellen Zahlen.

Da komplexe Zahlen zwei Komponenten haben, können sie nicht auf einer Zahlengeraden, sondern nur in der sogenannten *Gaußschen Ebene* dargestellt werden. Dabei trägt man den Realteil auf der  $x$ -Achse und den Imaginärteil auf der  $y$ -Achse ab (s. Abb. 1.2).

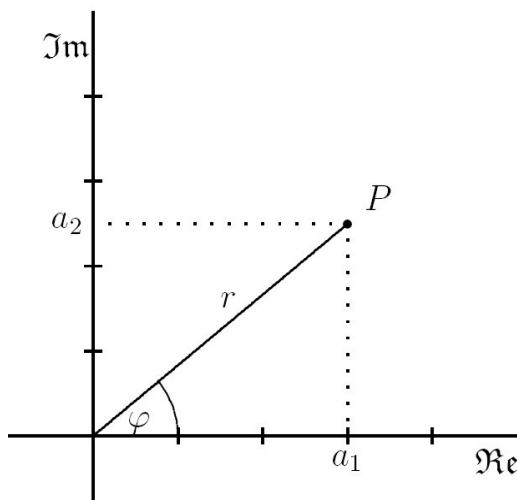


Abb. 1.2: Gaußsche Zahlenebene

Der Betrag  $|a|$  einer komplexen Zahl ist deren Abstand  $r$  zum Ursprung. Mithilfe des Satzes des Pythagoras ergibt sich für den Betrag von  $(a_1 + ia_2)$ :

$$|a| = r = \sqrt{a_1^2 + a_2^2}.$$

Somit handelt es sich beim Betrag um eine positive reelle Zahl.

Man kann komplexe Zahlen auch in Form von Polarkoordinaten darstellen (Abb. 1.2). Es ist dann mit dem Polarwinkel  $\alpha$ :

$$a = |a|(\cos \alpha + i \sin \alpha).$$

Für die Multiplikation zweier komplexer Zahlen  $ab = c$  ergibt sich

$$\begin{aligned} ab &= |a|(\cos \alpha + i \sin \alpha)|b|(\cos \beta + i \sin \beta) \\ &= |ab|(\cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta) \\ &\quad + i(\cos \alpha \sin \beta + \sin \alpha \cos \beta). \end{aligned}$$

Unter Anwendung des Additionstheorems für den Kosinus ist dann:

$$ab = |ab| \cos(\alpha + \beta) + i \sin(\alpha + \beta).$$

Mit  $ab = c$  kann man  $c$  als Zahl mit Polarwinkel  $\gamma = \alpha + \beta$  und Betrag  $|c| = |ab|$  schreiben

$$ab = |c|(\cos \gamma + i \sin \gamma).$$

Wir suchen eine Funktion, die die Eigenschaft

$$f(\alpha) + f(\beta) = f(\alpha + \beta)$$

besitzt, da dies auf die Winkel der Polarkoordinaten zutrifft. Eine solche Funktion ist die Exponentialfunktion. Man kann somit eine komplexe Zahl  $a$  auch als  $a = |a|e^{i\alpha}$  schreiben.

Das komplex Konjugierte  $a^*$  einer Zahl  $a = a_1 + ia_2$  wird definiert als  $a^* = a_1 - ia_2$ . In der Gaußschen Ebene entspricht das der Spiegelung von  $a$  an der  $x$ -Achse.

### 4.2 Vektorräume

Ein *Vektorraum*  $V$  ist eine Menge, für die gilt:

- Die Addition zweier seiner Elemente ergibt wieder ein Element aus  $V$ . Sie ist assoziativ und kommutativ.
- Man kann die Elemente mit komplexen Zahlen multiplizieren und erhält wieder Elemente aus  $V$ .
- $V$  enthält ein neutrales Element, auch Nullvektor ( $|0\rangle$ ) genannt, sodass gilt:

$$\forall |v\rangle \in V : |v\rangle + |0\rangle = |v\rangle.$$

- $V$  enthält ein inverses Element ( $|v^{-1}\rangle$ ), so dass gilt:

$$\forall |v\rangle \in V : |v\rangle + |v^{-1}\rangle = |0\rangle.$$

Die Elemente eines Vektorraums heißen *Vektoren*. Die ersten beiden Eigenschaften von  $V$  erlauben es, mehrere Vektoren und ihre Vielfachen zu neuen Vektoren zu kombinieren (sog. *Linearkombinationen*).

Eine Menge von *linear unabhängigen* Vektoren (Vektoren, die sich nicht gegenseitig durch Linearkombinationen erzeugen lassen), die den gesamten Vektorraum

$V$  durch Linearkombination ihrer Elemente erzeugen kann, heißt *Basis* des Vektorraums  $V$ . Die Anzahl der darin vorkommenden Vektoren heißt *Dimension* des Vektorraums. Ein Vektorraum kann beliebig viele Dimensionen besitzen, wobei  $\mathbb{C}^n$  ein  $n$ -dimensionaler Vektorraum zu den komplexen Zahlen ist.

### 4.3 Skalarprodukt

Das Skalarprodukt ist eine Abbildung, die je zwei Vektoren aus  $V$  eine komplexe Zahl zuordnet. Für das Skalarprodukt gilt:

- es ist *linear* in der zweiten Komponente

$$\forall |v\rangle, |w\rangle, |x\rangle \in V; \alpha, \beta \in \mathbb{C} : \\ \langle x | \alpha v + \beta w \rangle = \alpha \langle x | v \rangle + \beta \langle x | w \rangle,$$

- es ist *semilinear* in der ersten Komponente

$$\forall |v\rangle, |w\rangle, |x\rangle \in V; \alpha, \beta \in \mathbb{C} : \\ \langle \alpha v + \beta w | x \rangle = \alpha^* \langle v | x \rangle + \beta^* \langle w | x \rangle,$$

- es ist *positiv definit*

$$\forall |v\rangle \in V : \langle v | v \rangle \geq 0,$$

wobei die Gleichheit nur für den Nullvektor gilt,

- es hat folgende *Symmetrieeigenschaft*

$$\forall |v\rangle, |w\rangle \in V : \langle w | v \rangle = \langle v | w \rangle^*.$$

Ist das Skalarprodukt zweier Vektoren Null, so sagt man, sie stehen senkrecht aufeinander, sie sind *orthogonal*.

Ein Vektorraum mit Skalarprodukt heißt *Hilbertraum*  $\mathcal{H}$ . In der Quantenmechanik werden Vektoren im Hilbertraum dazu verwendet, reine Zustände zu beschreiben (vgl. Abschnitt 1.6).

Eine *Norm* kann mit dem Skalarprodukt wie folgt definiert werden:

$$\forall |v\rangle \in \mathcal{H} : \|v\|^2 = \langle v | v \rangle.$$

Sie bildet  $V$  auf die reellen Zahlen ab. Die Norm ist (wie das Skalarprodukt) positiv definit und beschreibt die Länge eines Vektors.

Für das Skalarprodukt gilt folgende Beziehung (Cauchy-Schwarz-Ungleichung):

$$|\langle v | w \rangle| \leq \|v\| \|w\|. \quad (1.1)$$

Sie wird später benötigt, um die Heisenbergsche Unschärferelation herzuleiten (vgl. Abschnitt 1.8).

### 4.4 Basen

Der Einfachheit halber werden bei Berechnungen die Basen orthonormalisiert, was für alle Basen möglich ist. Deswegen können wir ohne Einschränkung annehmen, dass die Vektoren der Basis  $\{|e^k\rangle | k \in I \subset \mathbb{N}\}$  senkrecht aufeinander stehen

$$\langle e^k | e^l \rangle = 0, \forall k \neq l$$

und die Länge 1 besitzen

$$\langle e_k | e_k \rangle = 1, \forall k \in I \subset \mathbb{N}.$$

Ein Vektor  $|v\rangle$  lässt sich folgendermaßen in der Basis  $|e_i\rangle$  darstellen:

$$|v\rangle = \sum_i v_i |e_i\rangle.$$

Die  $i$ -te Komponente  $v_i$  eines Vektors  $|v\rangle$  kann angegeben werden mit:

$$\langle e_i | v \rangle = \langle e_i | \sum_j v_j |e_j\rangle = \sum_j v_j \langle e_i | e_j \rangle = v_i.$$

Das Skalarprodukt zweier Vektoren eines Hilbertraumes berechnet sich also wie folgt:

$$\begin{aligned} \langle v | w \rangle &= \sum_i \langle e_i | v_i^* \sum_j w_j |e_j\rangle \\ &= \sum_{ij} v_i^* w_j \langle e_i | e_j \rangle \\ &= \sum_i v_i^* w_i. \end{aligned}$$

### 4.5 Matrizen und Operatoren

Eine Matrix ist eine Menge von Zahlen, die in Zeilen und Spalten angeordnet sind. Man kann Matrizen auf zwei Arten notieren: Entweder in Tabellenform

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}$$

oder man schreibt die Komponenten kurz als  $a_{ij}$ . Dabei ist  $i$  die Zeile, in der die Komponente steht, und  $j$  die Spalte der Komponente. Sind alle Komponenten zusammen gemeint, schreibt man kurz

$$\mathbf{A} = (a_{ij}).$$

Die Matrizen mit  $z$  Zeilen und  $s$  Spalten bilden die Menge  $\mathbb{R}^{z \times s}$ . Nun erklären wir, wie man mit Matrizen rechnen kann.

Zwei Matrizen werden komponentenweise addiert. Das geht nur, wenn beide Matrizen je gleich viele Zeilen und Spalten haben. Die allgemeine Form der Addition von Matrizen ist

$$\mathbf{A} + \mathbf{B} = (a_{ij}) + (b_{ij}) = (a_{ij} + b_{ij}).$$

Die Addition von Matrizen ist kommutativ und assoziativ. Man kann Matrizen auch komponentenweise mit

Zahlen multiplizieren, denn das ist gleichbedeutend mit der mehrmaligen Addition der Matrix mit sich selbst. Man kann zeigen, dass man Matrizen nicht nur mit den natürlichen, sondern auch mit allen anderen Zahlen komponentenweise multiplizieren kann.

Zwei Matrizen können miteinander multipliziert werden, wenn die erste genau so viele Spalten hat, wie die zweite Matrix Zeilen besitzt. Das bedeutet für die Räume der Matrizen, dass  $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}$  und  $\mathbf{B} \in \mathbb{R}^{n \times k}$  ist. Dann wird nach folgender Regel multipliziert

$$\mathbf{AB} = (a_{ij})(b_{js}) = \left(\sum_{j=1}^n a_{ij}b_{js}\right).$$

Die Multiplikation zweier Matrizen ist assoziativ, aber nicht kommutativ. Das bedeutet, dass im allgemeinen gilt  $\mathbf{AB} \neq \mathbf{BA}$ .

*Operatoren* sind lineare Abbildungen von einem Vektorraum auf den gleichen Vektorraum ( $\mathbf{A} : V \rightarrow V$ ). Man kann zeigen, dass man diese Abbildungen als Produkt des Vektors in Komponentenschreibweise mit einer quadratischen Matrix auffassen kann. Nun erwähnen wir noch einige Operatoren mit speziellen Eigenschaften.

Zu jedem Operator  $\mathbf{A}$  gehört ein *adjungierter Operator*, den wir mit  $\mathbf{A}^\dagger$  bezeichnen. Er erfüllt folgende Gleichung

$$\langle v|\mathbf{A}w\rangle = \langle \mathbf{A}^\dagger v|w\rangle \forall v, w \in V.$$

Die Matrix des Operators erfüllt folgende Eigenschaft:

$$a_{ij}^\dagger = (a_{ji})^*.$$

Man vertauscht bei jeder Komponente die Zeile und die Spalte und ersetzt sie gleichzeitig durch ihr komplex Konjugiertes. Operatoren, für die gilt

$$\mathbf{A} = \mathbf{A}^\dagger,$$

heißen *selbstadjungiert*.

Ein *inverser Operator* hebt die Wirkung eines Operators wieder auf. Ist also  $\mathbf{A}^{-1}$  der inverse Operator zu  $\mathbf{A}$ , dann gilt

$$\mathbf{AA}^{-1} = \mathbf{1} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{A}$$

bzw.

$$\mathbf{A}^{-1}\mathbf{A}|v\rangle = |v\rangle \quad \forall v \in \mathcal{H}.$$

Operatoren, für die gilt  $\mathbf{U}^{-1} = \mathbf{U}^\dagger$ , heißen *unitäre Operatoren*. Sie haben einige interessante Eigenschaften. So gilt zum Beispiel für unitäre Operatoren

$$\|\mathbf{U}|v\rangle\| = \| |v\rangle\| \quad \forall |v\rangle \in V$$

und

$$\langle \mathbf{U}v|\mathbf{U}w\rangle = 0 \Leftrightarrow \langle v|w\rangle = 0.$$

Das heißt, dass unitäre Operatoren die Länge eines Vektors unverändert lassen. Ebenso bleibt der Winkel zwischen zwei Vektoren gleich, wenn man den unitären Operator auf beide Vektoren anwendet. Das bedeutet, dass ein unitärer Operator eine orthonormale Basis auf eine andere orthonormale Basis abbildet, weswegen unitäre Operatoren einem Basiswechsel entsprechen.

Vektoren sind Matrizen mit nur einer Spalte. Daher können sie mit Hilfe der oben genannten Regel mit Matrizen multipliziert werden. Zu den Matrizen gibt es Vektoren mit folgender Eigenschaft:

$$\mathbf{A}|v\rangle = \lambda_v|v\rangle.$$

$|v\rangle$  heißt dann *Eigenvektor* von  $\mathbf{A}$ ,  $\lambda_v$  heißt *Eigenwert*. Die Eigenwerte der selbstadjungierte Operatoren sind rein reell, da

$$\lambda_v = \lambda_v \langle v|v\rangle = \langle v|\mathbf{A}v\rangle = \langle \mathbf{A}v|v\rangle = \lambda_v^* \langle v|v\rangle = \lambda_v^*.$$

Es gilt  $\lambda_v = \lambda_v^*$ , also muss  $\lambda_v \in \mathbb{R}$  sein. Eine weitere Eigenschaft selbstadjungierter Operatoren ist, dass ihre Eigenvektoren orthogonal aufeinander stehen.

Aus jedem Eigenvektor könnte man unendlich viele andere Eigenvektoren erzeugen, indem man sie mit einem Faktor multipliziert. Alle Vektoren, die so entstehen, erfüllen auch die Gleichung

$$\mathbf{A}|v'\rangle = \lambda'_v|v'\rangle$$

mit  $|v\rangle = k|v'\rangle$ .

Deswegen können wir ohne Einschränkungen die Eigenvektoren auf die Länge 1 normieren. Diese bilden eine Basis bzw. können zu einer Basis ergänzt werden.

Nun können wir die Operatoren in den Gesetzen der Quantenmechanik anwenden, um quantenmechanische Systeme zu beschreiben.



## 5 Der Stern-Gerlach-Versuch

(Anissa Zeghuzi, Katharina Rettig)

Nach der klassischen Physik wird angenommen, dass jedes System einen genau definierten und messbaren Zustand hat und außerdem jeder Ursache eine durch Naturgesetze bestimmte und vorhersagbare Wirkung folgt (Kausalität). Aus diesen beiden Annahmen ergibt sich die Idee des Determinismus. Sie wurde 1814 prominent von dem französischen Mathematiker Pierre-Simon de Laplace formuliert. Dem Laplaceschen Determinismus zufolge benötigt man das Wissen über Position und Geschwindigkeit aller Teilchen eines abgeschlossenen Systems zu einem bestimmten Zeitpunkt (Anfangszustand) und die Kenntnis aller Naturgesetze, um die Zukunft des jeweiligen Systems vorherzusagen und seine Vergangenheit zu rekonstruieren. Man nennt ein übermenschliches Wesen mit diesem Wissen den *Laplace'schen Dämon*.

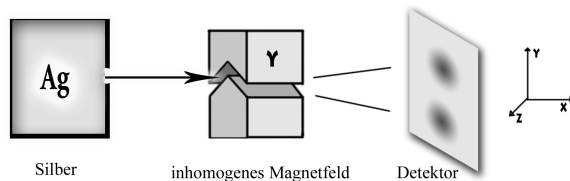


Abb. 1.3: Stern-Gerlach-Versuch. Die Silberatome werden von einem inhomogenen Magnetfeld (hier in  $y$ -Richtung) abgelenkt. Auf dem Schirm finden wir zwei Komponenten.

Wie der Versuch der beiden Physiker Otto Stern und Walther Gerlach von 1922 zeigt, wird es problematisch, an dieser Idee der klassischen Physik festzuhalten.

Bei dem Experiment werden magnetische Eigenschaften von Teilchen untersucht. Für den Versuch werden Silberatome verwendet. Diese sind elektrisch neutral und besitzen in der äußeren Schale nur ein Elektron. Nach der klassischen Physik dürften die Silberatome in einem Magnetfeld nicht abgelenkt werden, da sie elektrisch neutral sind. In der Versuchsdurchführung werden diese Silberatome auf einen Detektor geschossen. Bei dem Durchlauf der Atome durch ein homogenes Magnetfeld erkennt man einen diffusen Fleck auf dem Detektor. Wenn nun die Silberatome durch ein inhomogenes Magnetfeld geschossen werden, das z. B. in  $y$ -Richtung verläuft (die Richtung ist beliebig), treffen die Silberatome an zwei separierten Stellen auf dem Detektor auf (s. Abb. 1.3).

Der Grund für diese Ablenkung ist der sogenannte *Spin*. Dieser ist eine magnetische Eigenschaft eines Teilchens. In einem inhomogenen Magnetfeld verhält sich das Teilchen so, als hätte es in seinem Inneren eine sich drehende elektrische Ladung. In diesem Experiment kann man davon ausgehen, dass man den Spin des äußeren Elektrons des Silberatoms misst, da sich die anderen Komponenten, die zu einer Ablenkung führen könnten, ausgleichen. Mathematisch kann man den

Spin als eine Drehung beschreiben, obwohl das physikalisch kein vollständig korrektes Bild ist. Wäre der Spin eine Drehung, würde man im Sinne der klassischen Physik davon ausgehen, dass sich auf dem Detektor ein großer diffuser Fleck ergibt, da die Drehung kontinuierlich und in alle Raumrichtungen erfolgen sollte. Man erkennt jedoch zwei scharf getrennte Flecken. Der Grund dafür ist, dass der Spin keine kontinuierliche Größe ist. Entlang einer Achse gibt es nur zwei mögliche Spins:  $+\hbar/2$  und  $-\hbar/2$ . Man nennt dies *Spin up* und *Spin down*, mathematisch werden die Zustände als  $|+\rangle$  und  $|-\rangle$  ausgedrückt. Die Spinwerte sind Vielfache des *Planckschen Wirkungsquantums*. Aufgrund der Diskontinuität des Spins sprach man, als man den Stern-Gerlach-Versuch zum ersten Mal durchführte, von *Raumquantisierung*.

Die Silberatome werden je nach Spin-Richtung (Spin up oder Spin down) zur Hälfte nach oben und zur Hälfte nach unten abgelenkt. Wenn ein Teil dieser Atome (in diesem Fall die Teilchen mit Spin down) aufgefangen wird und man den anderen Teil (Spin up) erneut durch ein inhomogenes Magnetfeld schießt, das so ausgerichtet ist wie bei der ersten Messung, erkennt man nur einen Fleck. Diese Beobachtung entspricht der Erwartung der klassischen Physik. In einem anderen Versuch filtert man erneut die Teilchen mit der Eigenschaft  $y$ -Spin-down heraus und lenkt die übrigen Teilchen durch ein inhomogenes Magnetfeld, das in eine andere Richtung (z. B. in  $z$ -Richtung) ausgerichtet ist. Jetzt erkennt man wieder zwei Flecken auf dem Detektor. Die Teilchen, die in  $y$ -Richtung den selben Spin haben, besitzen in  $z$ -Richtung wieder zu fünfzig Prozent verschiedene Spins. Auch das ist nicht überraschend, da die Komponenten unabhängig voneinander sein könnten.

In einem weiteren Experiment wird der Spin im eben beschriebenen Versuch ein weiteres Mal in  $y$ -Richtung gemessen und überraschenderweise entstehen zwei Flecken:

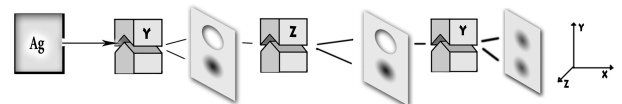


Abb. 1.4: Sequentieller Stern-Gerlach-Versuch. Messung des Spins in  $y$ -Richtung, dann in  $z$ -Richtung und wieder in  $y$ -Richtung.

Vorher wurden allerdings – wie man klassisch argumentieren würde – schon die Teilchen, die in  $y$ -Richtung Spin down hatten, „herausgefiltert“. Das bedeutet, dass die erste Messung durch die zweite unbrauchbar wurde und die Teilchen in der dritten Messung keine Abhängigkeit von der ersten Messung zeigen. Aus diesen

Versuchsergebnissen lassen sich verschiedene Interpretationen ableiten. Das Problem, dass bei der Messung der  $z$ -Komponente des Spins das Wissen über den Zustand der  $y$ -Komponente verloren geht und sich eine zufällige Verteilung ergibt, wird durch den Begriff der Komplementarität beschrieben. Der Begriff wurde von Niels Bohr ausformuliert und ist ein wichtiger Bestandteil der Kopenhagener Deutung. Er besagt, dass es bei der genauen Kenntnis einer Größe nicht möglich ist, vorauszusagen, was bei einer Messung der komplementären Größe geschieht. Das wird quantitativ durch die Heisenbergsche Unschärferelation ausgedrückt. Kom-

plementäre Größen sind neben den verschiedenen Komponenten des Spins (Spin in verschiedene Richtungen) z. B. Ort und Impuls eines Teilchens. Nach der Kopenhagener Deutung sind komplementäre Eigenschaften von Teilchen vor der Messung nicht genau bestimmt, deshalb kann es auch kein Wesen geben, das die völlig zufälligen Messergebnisse voraussagen kann (Laplace-scher Dämon). Die Kopenhagener Deutung verzichtet demnach auf das Prinzip des Determinismus.

Um das Experiment mathematisch zu beschreiben, führt man zunächst einige Axiome ein, die eindeutige Grundlagen für die Berechnung legen.

## 6 Axiome der Quantenmechanik

(Carina Martschinke, Andreas Landig, Fanny Yang, Miriam Boxriker)

Im folgenden schildern wir die Axiome der Quantenmechanik auf der Basis von Johann von Neumanns Vorgehensweise [2].

**Axiom 1** *Reine Zustände eines quantenmechanischen Systems werden durch Vektoren der Länge eins im Hilbertraum beschrieben.*

Da die quantenmechanischen Zustände durch Vektoren beschrieben werden, lassen sie sich durch Addition zu neuen Zuständen zusammensetzen (sog. *Superposition*). Das erste Axiom beinhaltet somit das *Superpositionsprinzip*, welches anhand des Gedankenexperiments „Schrödingers Katze“ erklärt werden kann:

- Eine Katze wird in einem Kasten eingesperrt.
- Betrachtet man die Katze als quantenmechanisches Objekt, kann sie sich in zwei Zuständen befinden. Sie kann entweder tot oder lebendig sein. Wie oben erwähnt können diese zwei Zustände zu einem neuen Zustand addiert werden. Somit ist die Katze in diesem Überlagerungszustand weder tot noch lebendig. Sie befindet sich in einer Superposition.
- Wird der Kasten geöffnet nimmt der überlagerte Zustand der Katze einen konkreten Wert an, die Katze ist entweder tot oder lebendig.

Der eigentliche Grund des Gedankenexperiments war, herauszufinden, ob die Quantenmechanik auf makroskopische Systeme anwendbar ist. Ein radioaktives Material, welches durch seinen Zerfall einen Mechanismus auslöst, stellte das quantenmechanische Objekt dar. Zerfällt das Material, wird ein Mechanismus ausgelöst. Dieser zerstört eine Giftampulle und tötet dadurch die Katze (makroskopisches Objekt). Wenn Superpositionen für das quantenmechanische System (radioaktiver Kern) möglich sind, warum dann nicht auch für die Katze?

Superpositionen sind fundamentaler Bestandteil der Quantenmechanik.

**Axiom 2** *Observable werden durch selbstadjungierte Operatoren beschrieben.*

**Axiom 3** *Die möglichen Messergebnisse einer Observablen sind die Eigenwerte des Operators. Sei  $|a\rangle$  ein Eigenvektor zum Operator  $\mathbf{A}$  mit  $\mathbf{A}|a\rangle = a|a\rangle$ . Die Wahrscheinlichkeit, an einem System im Zustand  $|\psi\rangle$  den Wert  $a$  zu messen ist gegeben durch den folgenden Ausdruck (Bornsche-Regel):*

$$P_\psi(a) = |\langle a|\psi\rangle|^2. \quad (1.2)$$

*Nach der Messung ist das System im Eigenzustand der zum gemessenen Wert gehört.*

Zur Beschreibung der Observable verwenden wir selbstadjungierte Operatoren, da deren Eigenwerte wie auch die Messergebnisse reelle Zahlen sind.

Wird eine Messung an einem System durchgeführt, befindet es sich danach im Eigenzustand. Wiederholt man diese Messung, ergibt sich für die Wahrscheinlichkeit, den selben Messwert zu erhalten nach (1.2) [5]:

$$P_{|a\rangle}(a) = |\langle a|a\rangle|^2 = 1.$$

In der Bornschen Regel ist elementar enthalten, dass wir die Realität mit Wahrscheinlichkeiten beschreiben. Das heißt, dass das deterministische Prinzip der klassischen Physik aufgegeben wird. Dieser Ansatz wurde z. B. von Albert Einstein kritisiert (vgl. Abschnitt 1.10).

Das Axiom erlaubt es uns, den Erwartungswert einer Observablen bezogen auf ein System im Zustand  $|\psi\rangle$  zu berechnen:

$$\langle A \rangle := \sum_a P_\psi(a)a, \quad (1.3)$$

wobei die Summe über alle möglichen Messergebnisse läuft. Die Gleichung (1.3) lässt sich wie folgt vereinfachen:

$$\begin{aligned} \langle A \rangle &= \sum_a |\langle a|\psi \rangle|^2 a \\ &= \sum_a \langle \psi|a \rangle a \langle a|\psi \rangle \\ &= \sum_a \langle \psi|\mathbf{A}a \rangle \langle a|\psi \rangle \\ &= \langle \psi|\mathbf{A} \sum_a |a \rangle \langle a|\psi \rangle \\ &= \langle \psi|\mathbf{A}\psi \rangle. \end{aligned} \quad (1.4)$$

Da wie oben erwähnt, die Eigenwerte der selbstadjungierten Operatoren reelle Zahlen sind, ergeben sich auch für die Erwartungswerte und für die Wahrscheinlichkeiten reelle Zahlen.

**Axiom 4** Der Zeitentwicklungsoperator  $\mathbf{U}_t$  gibt an, wie sich der Zustand des beobachteten Systems zeitlich ändert. Er ist definiert als

$$\mathbf{U}_t = e^{-\frac{i\mathbf{H}t}{\hbar}},$$

wobei  $\mathbf{H}$  der Operator zur Observablen Energie ist. Man berechnet den zeitabhängigen Zustand

$$|\psi, t\rangle = \mathbf{U}_t |\psi, t=0\rangle. \quad (1.5)$$

- $\mathbf{U}_t$  ist eine unitäre Matrix.
- $\hbar$  ist die Plancksche Konstante geteilt durch  $2\pi$ .
- $t$  ist der Zeitparameter. Der Zeit entspricht kein Operator, sie ist also in diesem Ansatz keine Observable.
- $\mathbf{H}$  heißt der *Hamiltonoperator*.
- Rechnen mit Operatoren im Exponenten: Die Exponentialfunktion kann man durch folgenden Ausdruck darstellen:

$$e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}.$$

Analog dazu kann man auch die Exponentialfunktion für Operatoren definieren:

$$e^{\mathbf{A}} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\mathbf{A}^k}{k!}.$$

Für jede physikalische Situation benutzt man spezielle Hamiltonoperatoren, welche oft von der klassischen Physik motiviert sind (Korrespondenzprinzip, das von der Quantenmechanik fordert, die klassische Physik als Grenzfall zu enthalten). Somit kann man manchmal über die klassische Mechanik diese Operatoren bestimmen.

Ein Beispiel ist der Hamiltonoperator für das Wasserstoffatom. Die Energie eines Elektrons in diesem System ist die Summe aus der kinetischen und potentiellen Energie (im elektromagnetischen Feld des Kerns). Der Ausdruck in der klassischen Mechanik würde wie folgt lauten:

$$\begin{aligned} E_{ges} &= E_{kin} + E_{pot} \\ &= \frac{p^2}{2m} + \frac{e^2}{r}, \end{aligned}$$

$r$  ist hier der Abstand zum Atomkern. Der Hamiltonoperator ergibt sich, indem man den Impuls durch den Impulsoperator und den Ort durch den Ortsoperator ersetzt. In der Ortsbasis ausgedrückt sieht der Impulsoperator folgendermaßen aus:  $\mathbf{P} = \frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial x}$ .

Damit ist der Hamiltonoperator in der Ortsbasis

$$\begin{aligned} \mathbf{H} &= \frac{\mathbf{P}^2}{2m} + V(r) \\ &= -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{e^2}{r}. \end{aligned}$$

Falls der gemessene Eigenzustand  $|a\rangle$  der Observablen  $\mathbf{A}$  gleichzeitig ein Eigenzustand des Hamiltonoperators ist (auch *stationäre Zustände* genannt), findet keine Änderung des Messwertes mit der Zeit statt, das heißt man würde für  $\mathbf{A}$  bei wiederholter Messung nochmals  $a$  messen. Dies ist am folgenden Beispiel gut erkennbar: Aus

$$\mathbf{H}|a\rangle = E|a\rangle$$

folgt

$$\begin{aligned} |a, t\rangle &= \mathbf{U}_t |a\rangle \\ &= e^{-\frac{i\mathbf{H}t}{\hbar}} |a\rangle \\ &= e^{-\frac{iEt}{\hbar}} |a\rangle. \end{aligned}$$

Das bedeutet für die Wahrscheinlichkeit, den Wert  $a$  zu messen:

$$\begin{aligned} P_{|a,t\rangle}(a) &= \left| \langle a|e^{-\frac{iEt}{\hbar}}|a\rangle \right|^2 \\ &= \left| e^{-\frac{iEt}{\hbar}} \right|^2 |\langle a|a\rangle|^2 \\ &= |\langle a|a\rangle|^2 \\ &= 1. \end{aligned}$$

Die Wahrscheinlichkeit, denselben Messwert  $a$  zu erhalten, ist also nach beliebiger Zeit  $t$  100%.

Man kann statt des Operators  $\mathbf{U}_t$  die Zeitentwicklung auch als Differentialgleichung angeben. Indem man nach der Zeit ableitet, erhält man aus Gleichung (1.5):

$$\mathbf{H}|\psi, t\rangle = i\hbar \frac{\partial}{\partial t} |\psi, t\rangle.$$

Für das oben angeführte Beispiel des Hamiltonoperators in der Ortsbasis würde folgende Gleichung gelten:

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} |\psi, t\rangle = \frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2} |\psi, t\rangle - V|\psi, t\rangle.$$

Erwin Schrödinger entwickelte diese Gleichung, bevor das Axiom in obiger Fassung formuliert wurde [6]. Er war zum einen nicht einverstanden mit der Idee von Quantensprüngen, die Heisenbergs Ansatz mit Matrizen suggerierte. Ihm stellte Schrödinger seine Gleichung, welche die Zustandsänderungen als Wellenfunktion darstellt, entgegen. Allerdings zeigte von Neumann später, dass beide Formulierungen mathematisch äquivalent sind. Zum anderen glaubte Schrödinger auch, das Problem des fehlenden Determinismus in der Quantenmechanik gelöst zu haben. Denn mit dieser Gleichung wird die Entwicklung der Zustände der quan-

tenmechanischen Teilchen deterministisch beschrieben, wie man es von der klassischen Physik bis dahin gewohnt war. Später stellte sich jedoch heraus, dass das Problem nur dann nicht auftritt, solange keine Messprozesse stattfinden.

Schrödinger schaffte es also nicht, sein Ziel zu erreichen, in der Quantenmechanik die Prinzipien der klassischen Physik zu erhalten. Der Unterschied zu Heisenbergs Ansatz besteht letztlich nur darin, dass die Gleichung einfacher zu lösen ist als die Rechnung mit Matrizen im Exponenten.

## 7 Das Stern-Gerlach-Experiment in der Quantenmechanik

(Katharina Rettig und Stefan Toman)

Um das Stern-Gerlach-Experiment zu verstehen, werden wir es nun in den mathematischen Formalismus der Quantenmechanik übertragen. Man kann die Ergebnisse nach Axiom 1 in einem zweidimensionalen Vektorraum darstellen, da bei den Messungen nur zwei Werte möglich sind ( $+\hbar/2$  und  $-\hbar/2$ ). Die Vektoren, die wir  $|z+\rangle$  und  $|z-\rangle$  nennen, sollen eine kanonische Basis bilden. Sie sind die Eigenvektoren des Operators zur Spinmessung in  $z$ -Richtung mit den Eigenwerten  $+\hbar/2$  und  $-\hbar/2$ . Da wir für die Observable „Spin in  $z$ -Richtung“ einen Operator brauchen, wie in Axiom 2 gefordert wird, müssen wir einen finden, der  $|z+\rangle$  und  $|z-\rangle$  als Eigenvektoren hat. Ein Operator, der das erfüllt, ist

$$\mathbf{S}_z = \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Nun wollen wir die Zustandsvektoren der Messergebnisse in  $x$ -Richtung ausrechnen. Dazu stellen wir folgende Bedingungen: Die Wahrscheinlichkeit, dass ein Teilchen aus dem Zustand  $|z+\rangle$  in den Zustand  $|x+\rangle$  wechselt, beträgt laut dem Experiment 50%. Das gleiche gilt für  $|x-\rangle$ , damit die Summe der Wahrscheinlichkeiten 1 ergibt.

Nach der Bornschen Regel (siehe Axiom 3) bedeutet das gleichzeitig:

$$|\langle x+ | z+\rangle|^2 = \frac{1}{2}$$

und

$$|\langle x- | z+\rangle|^2 = \frac{1}{2}.$$

Desweiteren sollen die Vektoren  $|x+\rangle$  und  $|x-\rangle$  senkrecht aufeinander stehen und auf die Länge 1 normiert sein. Aus diesen Bedingungen können wir  $|x+\rangle$  und  $|x-\rangle$  errechnen

$$\begin{aligned} |x+\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}} (|z+\rangle + |z-\rangle) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \\ |x-\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}} (|z+\rangle - |z-\rangle) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Nun brauchen wir noch den Operator  $\mathbf{S}_x$  mit den Eigenvektoren  $|x+\rangle$  und  $|x-\rangle$ . Er ist in der  $z$ -Basis

$$\mathbf{S}_x = \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Analog gehen wir für die  $y$ -Richtung vor und erhalten:

$$\mathbf{S}_y = \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}$$

mit den Eigenvektoren

$$\begin{aligned} |y+\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}} (|z+\rangle + i|z-\rangle) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} \\ |y-\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}} (|z+\rangle - i|z-\rangle) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Die Wahrscheinlichkeit, dass dieses Teilchen aus dem Zustand  $|z+\rangle$  in den Zustand  $x-$  springt, berechnet sich zu

$$\begin{aligned} |\langle x- | z+\rangle|^2 &= \frac{1}{2} |(\langle z+ | + \langle z- |) |z+\rangle|^2 \\ &= \frac{1}{2} |\langle z+ | z+\rangle + \langle z- | z+\rangle|^2 \\ &= \frac{1}{2} |\langle z+ | z+\rangle|^2 \\ &= \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Wie man erwartet, erhält man für die Erwartungswerte  $\langle \mathbf{S}_x \rangle$ ,  $\langle \mathbf{S}_y \rangle$  und  $\langle \mathbf{S}_z \rangle$  den Wert 0, denn in 50% der Fälle erhalten wir das Messergebnis  $+\hbar/2$ , in den restlichen 50% jedoch  $-\hbar/2$ , was einen Durchschnitt von 0 ergibt.

Damit wurde der Stern-Gerlach-Versuch komplett in der Sprache der Quantenmechanik ausgedrückt. Analog könnte man beispielsweise auch errechnen, mit welchen Wahrscheinlichkeiten welche Werte auftreten, wenn wir den Spin nicht entlang einer der kartesischen Koordinaten-Achsen messen, sondern in beliebigen Richtungen.

## 8 Heisenbergsche Unschärferelation

(Stefan Günther und Tobias Munker)

Die Unschärferelation wurde 1927 von Werner Heisenberg formuliert [7]. Mit ihr lässt sich die in Experimenten beobachtete Komplementarität von Observablen erstmals rechnerisch begründen.

Zur Herleitung führen wir zunächst den Abweichungsoperator  $\Delta_A := \mathbf{A} - \langle \mathbf{A} \rangle$  ein, wobei  $\langle \mathbf{A} \rangle$  mit der Einheitsmatrix multipliziert werden muss, um die Addition zu ermöglichen. In der Basis der Eigenvektoren von  $\mathbf{A}$  sind auf seiner Diagonalen die Abweichungen der Eigenwerte von  $\mathbf{A}$  vom Erwartungswert angeordnet, während alle anderen Werte 0 sind. Durch Anwenden des Operators auf einen Eigenvektor erhält man somit die Streuung um den Erwartungswert der Messergebnisse an diesem Zustand. Da  $\mathbf{A}$  und  $\langle \mathbf{A} \rangle$  beide selbstadjungiert sind, gilt dies auch für  $\Delta_A$ .

Der Erwartungswert des Varianzoperators  $\Delta_A^2$  ist nun

$$\langle \Delta_A^2 \rangle = \langle (\mathbf{A} - \langle \mathbf{A} \rangle)(\mathbf{A} - \langle \mathbf{A} \rangle) \rangle = \langle \mathbf{A}^2 \rangle - \langle \mathbf{A} \rangle^2.$$

Er gibt den Erwartungswert des Quadrats der Abweichung an. Das Quadrieren ermöglicht eine leichtere Abschätzung, da sich daraus ausschließlich positive Werte ergeben.

Für einen Operator gelte

$$\mathbf{C} = -\mathbf{C}^\dagger. \quad (1.6)$$

Dann muss der Ausdruck  $\langle \psi | \mathbf{C} | \psi \rangle$  eine rein imaginäre Zahl sein, da gilt:

$$-\langle \psi | \mathbf{C} | \psi \rangle = -\langle \mathbf{C}^\dagger \psi | \psi \rangle = -\langle \psi | \mathbf{C}^\dagger \psi \rangle^* = \langle \psi | \mathbf{C} \psi \rangle^*.$$

Anschaulich kann dieser Zusammenhang in der komplexen Zahlenebene dadurch erklärt werden, dass eine Punktspiegelung der Zahl  $\alpha$  am Koordinatenursprung ( $-\alpha$ ) und ihre Spiegelung an der reellen Achse ( $\alpha^*$ ) nur dann identisch sind, wenn  $\alpha$  auf der imaginären Achse liegt (vgl. Abschnitt 1.4.1).

Durch Quadrieren der Cauchy-Schwarz-Ungleichung (1.1) erhält man:

$$|\langle v | w \rangle|^2 \leq |v|^2 \cdot |w|^2 = \langle v | v \rangle \cdot \langle w | w \rangle.$$

Mit  $v = \Delta_A \psi$  und  $w = \Delta_B \psi$  ergibt sich nach Einsetzen

$$|\langle \Delta_A \psi | \Delta_B \psi \rangle|^2 \leq \langle \Delta_A \psi | \Delta_A \psi \rangle \cdot \langle \Delta_B \psi | \Delta_B \psi \rangle.$$

Da  $\Delta_A$  selbstadjungiert ist, gilt

$$|\langle \Delta_A \psi | \Delta_B \psi \rangle|^2 = |\langle \psi | \Delta_A \Delta_B \psi \rangle|^2.$$

Mit der Definition des Erwartungswerts (Gl. 1.4) folgt

$$|\langle \Delta_A \Delta_B \rangle|^2 \leq \langle \Delta_A^2 \rangle \langle \Delta_B^2 \rangle. \quad (1.7)$$

Außerdem gilt folgende Zerlegung:

$$\Delta_A \Delta_B = \frac{1}{2} [\Delta_A, \Delta_B] + \frac{1}{2} (\Delta_A \Delta_B + \Delta_B \Delta_A). \quad (1.8)$$

Der zweite Summand ist ein selbstadjungierter Operator. Es gilt weiterhin

$$[\Delta_A; \Delta_B] = [\mathbf{A}; \mathbf{B}], \quad (1.9)$$

und mit  $(\mathbf{AB})^\dagger = \mathbf{B}^\dagger \mathbf{A}^\dagger$  folgt

$$[\mathbf{A}, \mathbf{B}]^\dagger = -[\mathbf{A}; \mathbf{B}].$$

Das bedeutet, der Operator  $[\mathbf{A}, \mathbf{B}]$  verhält sich gemäß Gleichung (1.6). Wenn wir den Erwartungswert auf beiden Seiten von Gleichung (1.8) bilden, so ist der Erwartungswert (vgl. Gl. 1.4) des ersten Summanden auf der rechten Seite demnach eine imaginäre Zahl, der Erwartungswert des zweiten Summanden eine reelle Zahl. Deshalb kann man in der Zerlegung (1.8) termweise den Betrag des Erwartungswertes bilden und quadrieren, was bei Darstellung in der komplexen Zahlenebene dem Satz des Pythagoras entspricht. Dadurch erhält man:

$$\begin{aligned} |\langle \Delta_A \Delta_B \rangle|^2 &= \frac{1}{4} |\langle [\Delta_A; \Delta_B] \rangle|^2 \\ &\quad + \frac{1}{4} |\langle (\Delta_A \Delta_B + \Delta_B \Delta_A) \rangle|^2 \\ &\geq \frac{1}{4} |\langle [\Delta_A, \Delta_B] \rangle|^2. \end{aligned}$$

Die Anwendung von Gleichung (1.7) ergibt:

$$\frac{1}{4} |\langle [\Delta_A; \Delta_B] \rangle|^2 \leq \langle \Delta_A^2 \rangle \langle \Delta_B^2 \rangle.$$

Es ergibt sich mit Gleichung (1.9) die allgemeine Form der Heisenbergschen Unschärferelation:

$$\frac{1}{4} |\langle [\mathbf{A}; \mathbf{B}] \rangle|^2 \leq \langle \Delta_A^2 \rangle \langle \Delta_B^2 \rangle.$$

Sie besagt, dass das Produkt der Varianzen (oder auch Unschärfen) von zwei Observablen  $\mathbf{A}$  und  $\mathbf{B}$  immer größer als ein fest bestimmter Wert ist, welcher von deren Kommutator abhängt. Die Unschärferelation gilt für alle Zustände, wobei die in ihr enthaltenen Erwartungswerte abhängig vom beliebig gewählten Zustand des Systems sind. Der Kommutator zweier Observablen kann als Maß für deren gegenseitige Beeinflussung betrachtet werden. Wenn der Kommutator zweier Observablen 0 ergibt, so sind diese voneinander unabhängig und gleichzeitig exakt bestimmbar.

Da sich die Unschärferelation aus den ersten drei Axiomen der Quantenmechanik herleitet, ist im Falle von deren Gültigkeit die Unschärfe gemäß der Kopenhagener Deutung fester Bestandteil der Natur und nicht nur die Folge fehlerhafter Messungen.

Ein oft angeführter Spezialfall der Unschärferelation beschreibt die Beziehung zwischen Ortsunschärfe  $\Delta_x$  und Impulsunschärfe  $\Delta_p$  mit

$$\frac{\hbar^2}{4} \leq \langle \Delta_x^2 \rangle \langle \Delta_p^2 \rangle.$$

Dabei resultiert die Unschärfe des Ortes laut Quantenmechanik jedoch nicht aus der Wechselwirkung mit

dem Impulsmessgerät, sondern ist von vornherein in der Natur des Teilchens enthalten.

Für makroskopische Objekte wird jedoch die Impulsunschärfe gegenüber dem Impuls und die Ortsunschärfe gegenüber der Länge so klein, dass wir sie als scharf wahrnehmen.

## 9 Verschränkung

(Henrike Gätjens und Marco Aliprandi)

Die Verschränkung ist eine besondere quantenmechanische Eigenschaft: Zwei oder mehr Teilchen sind dann verschränkt, wenn sie nicht unabhängig voneinander beschrieben werden können.

Z. B. kann man zwei Spinsysteme  $A$  und  $B$ , die gleichzeitig betrachtet werden, normalerweise als getrennt bzw. trennbar auffassen. Diese Eigenschaft nennt man *Seperabilität*. Das Gesamtsystem kann durch ein Produkt aus den jeweiligen Eigenvektoren beschrieben werden. Wir betrachten nun zwei Spinsysteme  $A$  und  $B$ , die z. B. folgende Zustände annehmen können:

$$\begin{aligned} |v_1\rangle &= |+\rangle_A |-\rangle_B \\ |v_2\rangle &= |-\rangle_A |+\rangle_B. \end{aligned}$$

Wenn man nun das erste Axiom der Quantenmechanik auf das gesamte System anwendet, kann man diese beiden Zustände zu einem neuen Zustand kombinieren, der wiederum ein möglicher Zustand des Gesamtsystems ist. Dieses wird beschrieben durch

$$|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} [|+\rangle_A |-\rangle_B - |-\rangle_A |+\rangle_B]. \quad (1.10)$$

Der Zustand des Gesamtsystems lässt sich nicht mehr als Produkt von zwei Einzelzuständen der Systeme  $A$  und  $B$  darstellen. Sie sind nun auf eine Weise miteinander verbunden, die es unmöglich macht, die beiden

Einzelsysteme unabhängig voneinander zu beschreiben. Sie befinden sich in einem *verschränkten Zustand*. Tatsächlich treten solche Kombinationen sehr viel häufiger auf als die oben beschriebenen Produktzustände, verschränkte Zustände sind in der Quantenmechanik somit durchaus der Normalfall.

Der oben stehende Formalismus beschreibt die Nichtlokalität. Es handelt sich um ein physikalisches Konzept, das mögliche Interaktionen zwischen zwei verschränkten Zustände beschreibt. Für die Verschränkung ist der Ort der beiden Systeme und deren Entfernung unwichtig, sie kann auch bestehen, wenn  $A$  und  $B$  räumlich getrennt sind.

Es besteht ein Zusammenhang zwischen einem verschränkten Zustand und den Messungen, die an einem der beiden verschränkten Systeme durchgeführt werden. Die Verwicklung der beiden Systeme ermöglicht bei einer Messung von einem der Teilsysteme Informationen über das andere aus dem Ergebnis herauszuarbeiten. Falls man beispielsweise beim System  $A$  in der  $x$ -Richtung den Spinwert  $+\hbar/2$  misst, so ist der Spin in  $x$ -Richtung beim anderen System notwendigerweise  $-\hbar/2$ . Der Zustand des Gesamtsystems kann nach der Messung wieder als Produkt zweier Faktoren beschrieben werden, der verschränkte Zustand ist aufgehoben.

## 10 Einstein-Podolski-Rosen-Experiment

(Carina Martschinke und Andreas Landig)

Das „EPR-Experiment“ ist ein Gedankenexperiment der Physiker Albert Einstein, Boris Podolski und Nathan Rosen, welche im Jahre 1935 ihre Kritik an der Quantenmechanik zum Ausdruck brachten [8]. Ihre Hauptkritikpunkte waren dabei zum einen die elementare Wahrscheinlichkeit, welche durch die Bornsche Regel zum Ausdruck kommt, sowie die verschränkten Zustände der Quantenmechanik. Die Autoren waren überzeugt, dass eine fundamentale Beschreibung der Wirk-

lichkeit ohne Wahrscheinlichkeiten auskommen müsse. Sie gaben Denkansätze für eine Theorie mit versteckten Variablen, um am deterministischen Prinzip der klassischen Physik festhalten zu können.

Um das Gedankenexperiment verstehen zu können, müssen die folgenden Begriffe erklärt werden:

- Eine Forderung von Einstein, Podolski und Rosen ist die *Lokalität*: Die Teilchen eines Systems

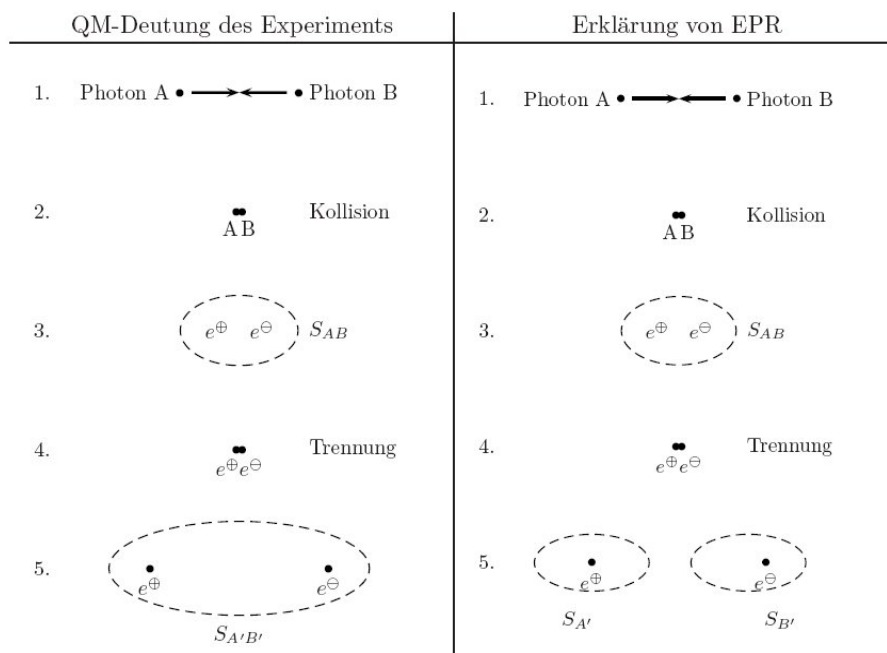


Abb. 1.5: Einstein-Podolski-Rosen-Experiment in der klassischen (rechts) und der quantenmechanischen Deutung.

wechselwirken nur dann miteinander, wenn sie sich in unmittelbarer Nähe befinden.

- Für die Quantenmechanik ist der Begriff der *Komplementarität* von zentraler Bedeutung: Wir können nicht gleichzeitig über zwei „komplementäre“ Messgrößen eines quantenmechanischen Objekts Auskunft geben. Dies ist durch die Heisenbergsche Unschärferelation quantitativ beschreibbar.

### 10.1 Gedankenexperiment

Im Gedankenexperiment (s. Abb.1.5) werden zwei Photonen  $A$  und  $B$  zur Kollision gebracht. Der Gesamtspin der beiden sei Null. Wenn die Photonen Energie reich genug sind, können ein Elektron ( $e^-$ ) als auch das dazugehörige Antiteilchen (Positron  $e^+$ ), entstehen (Paarbildung). Die zwei Teilchen bilden nun ein verschränktes System  $S_{AB}$  mit dem Gesamtspin 0, wegen der Drehimpulserhaltung. Nun folgt die räumliche Trennung der beiden Teilchen. Mit Hilfe eines inhomogenen Magnetfelds wird danach, wie im Stern-Gerlach-Experiment beschrieben, der Spin des Elektrons in eine beliebige Raumrichtung (z. B.  $x$ -Richtung) gemessen. Da der Gesamtspin 0 sein muss, folgt aus der Messung des Elektrons, dass das Positron in der selben Richtung gemessen den entgegengesetzten Spin (wenn Elektron  $|x+\rangle$ , dann Positron  $|x-\rangle$ ) haben muss. Außerdem wird gleichzeitig noch in einer zweiten Messung der Spin des Positrons in einer anderen Richtung bestimmt.

### 10.2 Quantenmechanische Deutung des Experiments

Die Quantenmechanik geht davon aus, dass wir auch nach der räumlichen Trennung der beiden Teilchen noch ein verschränktes System  $S_{A'B'}$  haben, was gegen die Lokalität verstößt. Damit ist die Quantenmechanik eine nichtlokale Theorie. Wenn wir z. B. das Elektron in  $x$ -Richtung messen, erhalten wir zu 50%-iger Wahrscheinlichkeit  $|x+\rangle$  bzw.  $|x-\rangle$  und damit ist mit 100%-iger Wahrscheinlichkeit die  $x$ -Komponente des Positrons wegen der Gesamtspinerhaltung entgegengesetzt. Nach den Prinzipien der Quantenmechanik kann man aus der zweiten Messung des Positrons in  $y$ -Richtung nicht auf den Spin des Elektrons in dieser Raumrichtung schließen. Das würde gegen die Komplementarität verstoßen. Nach der Messung eines der beiden Teilchen besteht keine Verschränkung mehr.

### 10.3 Erklärung von Einstein, Podolski und Rosen

Im Gegensatz zur quantenmechanischen Deutung sagen EPR, dass Positron und Elektron im Moment der räumlichen Trennung sich über jede beliebige Raumrichtung im Sinne der Gesamtspinerhaltung 0 „verständigen“ würden. Die Raumrichtung der Messung spielt dabei keine Rolle. Nach EPR bilden die zwei Teilchen nach ihrer Trennung damit zwei eigenständige Systeme ( $S_{A'}$  bzw.  $S_{B'}$ ) und sind nicht mehr verschränkt. Laut EPR kann durch die zweite Messung, die des Positrons in  $y$ -Richtung, auch der Spin des Elektrons in  $y$ -Richtung ermittelt werden. Für EPR ist es möglich, sowohl über die  $x$ -Komponente als auch über die  $y$ -Komponente des Spins der beiden Teilchen gleichzeitig

Auskunft zu geben. Beide Teilchen haben sich auf einen bestimmten Spin in jeder Richtung festgelegt und befinden sich nicht in einem gemeinsamen Zustand.

Bis zu Einsteins Tod war nicht klar, welche Deutung die richtige ist. Die Bellschen Ungleichungen, welche im folgenden erläutert werden, können diese Frage klären.

## 11 Bellsche Ungleichungen

(Anna Schmalen und Noemi Skorzynski)

Wie bereits im vorangegangenen Kapitel erwähnt, war für Einstein, Podolski und Rosen die Quantentheorie aufgrund von zwei grundlegenden Prinzipien inakzeptabel: die Nichtlokalität und die Unbestimmtheit grundlegender physikalischer Eigenschaften. Sie versuchten ihre Ansichten mit Hilfe des EPR-Experimentes zu untermauern. In seiner ursprünglichen Form konnte dieses Gedankenexperiment jedoch keine der beiden Theorien widerlegen oder bestätigen. Erst nach dem Tod Einsteins gelang es dem Physiker John Bell zu beweisen, dass beide Theorien in bestimmten Fällen zu unterschiedlichen Vorhersagen führen, was der erste Schritt zur Widerlegung von Einsteins Theorie war [10].

### 11.1 Bells Argumentation

Bell ging dabei von drei beliebigen Messrichtungen  $a$ ,  $b$  und  $c$  aus. Einstein zufolge „einigen“ sich die Teilchen bereits im Moment der Trennung für jede mögliche Messrichtung über ihre jeweiligen Messwerte gerade so, dass sie in der gleichen Richtung immer den Gesamtspin Null haben. Deswegen kann man aufgrund der Messung an einem Teilchen (laut Einstein) auf den Zustand des anderen schließen.

Messen zwei Beobachter  $A$  und  $B$  jeweils an einem der beiden Teilchen den Spin in einer der drei Richtungen  $a$ ,  $b$  oder  $c$ , ergeben sich acht Möglichkeiten. Wird der Versuch  $N$ -mal durchgeführt, geben wir die Anzahl der jeweiligen Ergebnisse durch  $N_1$  bis  $N_8$  an, wie in der folgenden Tabelle.

Anzahl	Teilchen $A$	Teilchen $B$
$N_1$	$(a+, b+, c+)$	$(a-, b-, c-)$
$N_2$	$(a+, b+, c-)$	$(a-, b-, c+)$
$N_3$	$(a+, b-, c+)$	$(a-, b+, c-)$
$N_4$	$(a+, b-, c-)$	$(a-, b+, c+)$
$N_5$	$(a-, b+, c+)$	$(a+, b-, c-)$
$N_6$	$(a-, b+, c-)$	$(a+, b-, c+)$
$N_7$	$(a-, b-, c+)$	$(a+, b+, c-)$
$N_8$	$(a-, b-, c-)$	$(a+, b+, c+)$

Wir untersuchen die EPR-Wahrscheinlichkeit dafür, dass am Teilchen  $A$  der Zustand  $|a+\rangle$  und am Teilchen

$B$  der Zustand  $|c+\rangle$  gemessen wird. Für ausreichend große  $N$  können wir dies ausdrücken als:

$$P(a+; c+) = \frac{N_2 + N_4}{N}.$$

Da alle Wahrscheinlichkeiten größer oder gleich Null sind, kann man auch schreiben:

$$\begin{aligned} P(a+; c+) &\leq \frac{N_3 + N_4 + N_2 + N_6}{N} \\ &= \frac{N_3 + N_4}{N} + \frac{N_2 + N_6}{N} \\ &= P(a+; b+) + P(b+; c+). \end{aligned}$$

Dies ist eine der Bellschen Ungleichungen. Sie muss nach Einsteins Argumentation in allen Fällen gelten.

### 11.2 Quantenmechanische Behandlung

Nun wollen wir die Situation mit Hilfe der Quantenmechanik untersuchen.

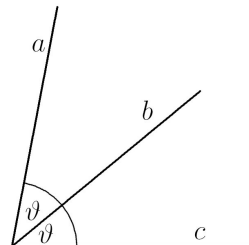


Abb. 1.6: Lage der Messrichtungen in der  $x$ - $y$ -Ebene.

Dafür wählen wir die drei Messrichtungen  $a$ ,  $b$  und  $c$  so, dass

- alle in einer Ebene liegen,
- zwischen  $a$  und  $b$  bzw. zwischen  $b$  und  $c$  der Winkel  $\vartheta$  liegt,
- die  $a$ -Richtung parallel zur  $x$ -Achse liegt ( $|a\pm\rangle = (|+\rangle \pm |-\rangle)/\sqrt{2}$ ),
- die  $z$ -Achse senkrecht auf der Ebene steht.

Um die Basisvektoren zur  $b$ - und  $c$ -Richtung zu erhalten, dreht man die Basis zu  $a$  an der  $z$ -Achse um den Winkel  $\vartheta$  bzw.  $2\vartheta$ .

$$|c+\rangle = \mathbf{D}_z(2\vartheta)|a+\rangle.$$



Wird am Teilchen  $A$  der Wert  $+\hbar/2$  in  $a$ -Richtung gemessen, dann ist  $B$  im Zustand  $|a-\rangle$ , da sich die Teilchen im verschränkten Zustand Gleichung (1.10)

$$\frac{1}{\sqrt{2}}[|+\rangle_A|-\rangle_B - |-\rangle_A|+\rangle_B]$$

befinden. Außerdem berechnet man  $|c+\rangle$ :

$$|c+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(e^{-i\vartheta}|+\rangle + e^{i\vartheta}|-\rangle).$$

Mithilfe der Bornschen Regel kann man nun die Wahrscheinlichkeiten dafür berechnen, dass an  $B$  in  $b$ -Richtung  $+\hbar/2$  gemessen wird, wenn das Teilchen zuvor im  $|a-\rangle$  Zustand war. Da die Wahrscheinlichkeit dafür, dass  $A$  im  $|a-\rangle$  Zustand ist, 50% beträgt, muss man, um die Wahrscheinlichkeit  $P(a+; c+)$  zu erhalten, diese Wahrscheinlichkeit noch mit  $\frac{1}{2}$  multiplizieren,

$$\begin{aligned} P(a+; c+) &= \frac{1}{2}|\langle c+ | a-\rangle|^2 \\ &= \frac{1}{2}\sin^2 \vartheta. \end{aligned}$$

Ebenso gilt für die anderen Wahrscheinlichkeiten:

$$\begin{aligned} P(b+; c+) &= \frac{1}{2}\sin^2 \frac{\vartheta}{2} \\ P(a+; b+) &= \frac{1}{2}\sin^2 \frac{\vartheta}{2}. \end{aligned}$$

Demnach müsste mit der Bellschen Ungleichung gelten:

$$\sin^2 \vartheta \stackrel{?}{\leq} 2 \sin^2 \frac{\vartheta}{2}.$$

Für das Beispiel  $\vartheta = \frac{\pi}{4}$  bedeutete das:

$$\begin{aligned} \sin^2 \frac{\pi}{4} &\stackrel{?}{\leq} 2 \sin^2 \frac{\pi}{8} \\ 0,5 &\stackrel{?}{\leq} 0,3 \end{aligned}$$

Damit ist die Bellsche Ungleichung verletzt, was bedeutet, dass sich der quantenmechanische Ansatz und der Einsteins nicht nur in der Erklärung bzw. Interpretation unterscheiden, sondern auch zu unterschiedlichen Vorhersagen führen, die experimentell überprüft werden können.

Als man dank fortgeschrittener technischer Möglichkeiten in der Lage war, analoge Experimente zum EPR-Experiment, welches bisher nur ein Gedankenexperiment gewesen war, durchzuführen, bestätigten sich die mit der Quantentheorie errechneten Wahrscheinlichkeiten [11]. Die Bellschen Ungleichungen waren also tatsächlich falsch, was bedeuten musste, dass Einstein eine falsche Annahme gemacht haben muss. Die meisten Physiker gehen davon aus, dass dies die Annahme der Lokalität ist (vgl. ausführlicher [12]).

## 12 Kopenhagener Deutung, Messproblem, Kollaps

(Stefan Günther und Tobias Mürker)

Die erste Axiomatisierung der Quantenmechanik stammt von dem Mathematiker Johann von Neumann [2]. Mit ihrer Hilfe erbrachte er auch den Nachweis der Äquivalenz von Schrödingers Wellen- und Heisenbergs Matrixdarstellung. Bei den bereits eingeführten vier Axiomen der Quantenmechanik handelt es sich um Umformulierungen der Beschreibung von Neumanns.

Die Kopenhagener Deutung war lange Zeit die verbreitetste Deutung dieses zur Beschreibung der quantenmechanischen Phänomene verwendeten Formalismus. Sie wurde 1927 von der Arbeitsgruppe um Niels Bohr formuliert, zu der unter anderem auch Werner Heisenberg gehörte [7, 13]. Anlass waren die Beobachtung von Quanten entweder als Welle oder als Teilchen, die Tatsache, dass man bei den gleichen Teilchen beim Messen der gleichen Eigenschaft unterschiedliche Messergebnisse erhält, sowie das ausschließliche Auftreten reiner Zustände bei Messungen. Eine zentrale Rolle spielt Bohrs Prinzip der *Komplementarität*, welches besagt, dass es zwei nebeneinander existierende Beschreibungen der Quantenwelt gibt, von denen immer genau eine auf eine bestimmte Situation anwendbar ist, in der Sprache der anderen zu reden aber sinnlos wäre. Dies ist eine revolutionäre Vorstellung, da in der klas-

sischer Physik die Theorien stets universelle Gültigkeit beanspruchten und keine Beeinflussung der beobachteten Größen durch die Beobachtung selbst angenommen wurde. Außerdem entschärft Borns Wahrscheinlichkeitsinterpretation der Wellenfunktion, die auch Bohr verwendet, den Widerspruch zwischen Teilchen und Wellen, indem sie die letzteren als Wahrscheinlichkeitswellen im abstrakten Hilbertraum betrachtet. Die Welle *ist* also nicht das Teilchen, sondern nur eine Wahrscheinlichkeitsangabe für mögliche Ergebnisse im Falle einer Messung. Dies geht mit der operationalistischen Position Bohrs einher, wonach die Aufgabe der Physik lediglich darin besteht, Beziehungen zwischen Messergebnissen zu erforschen und andere Messergebnisse vorherzusagen. Er argumentiert, die Realität werde dem Physiker nur durch Messung zugänglich und somit bleibe die Realität „hinter“ der Messung verborgen. Deshalb könne man nur die Messungen gerechtfertigt zum Gegenstand der Wissenschaft machen. Weiterhin beinhaltet die Kopenhagener Deutung aufgrund der Wahrscheinlichkeitsinterpretation die Aufgabe des Determinismus.

### 12.1 Messproblem

Es stellt sich die als Mess- oder Kollapsproblem bezeichnete Frage, warum ein in Superposition, also in der Linearkombination möglicher reiner Zustände, befindliches System bei Messung plötzlich in einen reinen Zustand übergeht. Dieser Übergang wird auch als *Kollaps* bezeichnet. Genaugenommen besagt dies einen Widerspruch zwischen dem 3. und 4. Axiom der Quantenmechanik.

Die Kopenhagener Deutung gibt auf diese Frage keine Antwort, sondern verwendet den Begriff *Messung* als unerklärten Grundbegriff.

### 12.2 Was genau ist eine Messung?

Damit bleibt unklar, was genau eine Messung ausmacht, was genau also das System kollabieren lässt. Bei Schrödingers Katze wäre zum Beispiel möglich, dass schon der radioaktive Zerfall, das Auslösen des Mechanismus, das Zerstören der Giftampulle oder spätestens das Töten der Katze als „Messung“ gilt und einen Kollaps herbeiführt. Man könnte aber auch behaupten, dass dies erst durch das Erfassen des Zustandes mit dem Bewusstsein des Beobachters geschieht, welcher die Kiste öffnet.

Bohr verwendet den aus der Alltagssprache entlehnten Messbegriff in der Kopenhagener Interpretation zunächst im Sinne der klassischen Physik und begründet die Vorrangigkeit des klassischen Vokabulars damit, dass Messungen letztlich nur unter Rückgriff auf

klassische Begriffe wie den Ort (etwa des Messzeigers) beschreibbar sind. Dies bedingt, dass je nachdem, welcher klassische Begriff in einer bestimmten Beobachtungssituation anwendbar ist, der jeweils komplementäre Begriff nicht verwendbar ist. Daher ist eine Rede über die durch die Unschärferelation festgelegten Grenzen hinaus sinnlos.

Auch bei von Neumann wird *Messung* als primitiver Begriff behandelt, welcher keine weitere Erklärung erfährt. Er trennt scharf zwischen Beobachter und beobachtetem System, wobei aber von ihm keine eindeutige Grenze angegeben wird.

Ein Versuch, eine solche Erklärung zu geben und somit das sogenannte *Demarkationsproblem* zu beantworten besteht darin, auf die Grenze zwischen Mikro- und Makroskopie zu verweisen. *Messung* wird folglich als Wechselwirkung des gemessenen mikroskopischen System mit einem makroskopischen Messsystem definiert. Allerdings verschiebt dies das Problem auf die Grenzziehung zwischen Mikro- und Makrokosmos.

Nach Wigner ist eine Messung eine Wahrnehmung durch das Bewusstsein. Dies bedürfte ebenfalls einer klaren Unterscheidung reiner physikalischer Systeme von Systemen mit Bewusstsein.

Eine ganz andere Lösung besteht in der Aufgabe des Kollapspostulats in weiteren, an anderer Stelle thematisierten Theorien. Damit wird die Notwendigkeit umgangen zu definieren, was eine zum Kollaps führende *Messung* ist. Nichtkollapstheorien führen jedoch zu anderen Problemen.

## 13 Viele-Welten- und Viele-Bewusstseine-Theorien

(Miriam Boxriker und Fanny Yang)

Die Kopenhagener Deutung liefert eine unbefriedigende Antwort für das Messproblem. Die verschiedenen Problemfelder sind: die externe Stellung des Beobachters, die Annahme eines Kollapses der möglichen Zustände bei einer Messung und die unklare Trennung von Messapparat und gemessenem System. Ein Vorschlag ist, die Welt in mikroskopische und makroskopische Systeme aufzuteilen, wobei trotzdem das Demarkationsproblem nicht gelöst wurde. Es blieb unklar, wo die Grenze zwischen den beiden Systemen zu ziehen sei. Everett unterbreitete deswegen eine neue Idee.

1957 schlug er vor, die gesamte Welt in Übereinstimmung mit dem mathematischen Formalismus quantenmechanisch zu betrachten. Der Beobachter ist also Teil des Systems, das gemessen wird. Das bedeutet, dass alle möglichen Zustände tatsächlich existieren und die Welt sich in Superposition befindet. Bei einer Messung findet man allerdings nur ein Ergebnis, obwohl die Überlagerung weiterhin besteht. Das eindeutige Messergebnis sieht Everett in der subjektiven Wahrnehmung

des Menschen begründet. Allein das Bewusstsein sei unfähig, die verschiedenen Zustände der Welt gleichzeitig wahrzunehmen. Es gibt somit in dieser Theorie keinen Kollaps. Ein System verändert sich objektiv kontinuierlich und deterministisch.

Zusammenfassend sind dies die Vorschläge Everetts. Wie er sie aber genau anwenden wollte, blieb in Folge der unpräzisen Darstellung schleierhaft. Deshalb wurde Everetts Ansatz Grundlage verschiedener verfeinerter Theorien. Die zwei bekanntesten sind die Viel-Welten- und Viele-Bewusstseine-Theorie.

Die Viele-Welten-Theorie wurde in den 1960er und 70er von Bryce Seligman DeWitt aufgestellt [14]. Sie besagt, dass für jeden in Superposition beschriebenen Zustandsvektor eine Welt existiert. Jedes Mal wenn ein Quantenübergang stattfindet (unabhängig von Messungen), spaltet sich die Welt in so viele Welten auf, wie es mögliche Messergebnisse gibt, die jeweils einem eigenen Eigenzustand entsprechen. Die Entwicklung ei-

ner Welt an sich ist vollkommen deterministisch. Keine Welt interagiert mit irgend einer anderen. Es findet also auch hier kein Kollaps statt.

Folgendes wurde bei dieser Theorie kritisiert: Wie erklärt man sich die Tatsache, dass man mit einer Wahrscheinlichkeit, die die Quantenmechanik voraussagt, bestimmte Zustände misst, und nicht naive Wahrscheinlichkeiten, das heißt für jede Möglichkeit die gleiche Wahrscheinlichkeit erhält? Egal welche Wahrscheinlichkeit man für zwei Zustände bei einer Messung nach dem quantenmechanischen Formalismus errechnet, findet man bei der Viele-Welten-Theorie eine Wahrscheinlichkeit von 50% für beide Zustände, da genau zwei Welten entstehen, in denen einmal der eine und einmal der andere verwirklicht wird. Ferner hängt von der Wahl der Basis die Wahrscheinlichkeit ab, mit der ein Zustand gemessen wird. Deswegen muss man aus einer sehr große Anzahl an unterschiedlichen Basen eine einzige (präferierte Basis) auswählen. Es ist aber nicht klar, wie diese Basis gewählt werden soll (vgl. [16, S. 627ff]).

Die Viele-Bewusstseine-Theorie wurde in den 1970er Jahren entwickelt. Zu dieser Theorie äußerte sich unter anderem H. Dieter Zeh. Es existiert im Gegensatz zu DeWitt nicht für jeden möglichen Zustand eine Welt, sondern ein Bewusstsein. Es gibt nur eine Welt, aber in jedem Menschen eine Überlagerung an subjektiven Bewusstseinen, die jeweils einen Zustand wahrnehmen können. Die aktuelle Wahrnehmung eines Zustandes entsteht also weder aus einem Kollaps von möglichen

Zuständen, noch aus einer naiven Wahrscheinlichkeit, sich zwischen verschiedenen Zuständen zu entscheiden.

Auch die Viele-Bewusstseine-Theorie wirft Fragen auf. Warum nimmt man gerade die Wahrscheinlichkeit wahr, die die Quantenmechanik vorhersagt? Der Verdacht liegt nahe, dass es sich hierbei nur um eine Verlagerung des Kollapsproblems handelt.

Ein weiteres Problem brachten Supervenienz-Vertreter zur Sprache. *Supervenienz* bezeichnet eine Beziehung zwischen zwei Ebenen, in diesem Fall zwischen Gehirn (materiell) und Geist (mental). Dabei ist diese Beziehung nur in einer Richtung implikativ. D. h. wenn der Geist einen Zustand erkennt, muss sich zwangsläufig die Aktivität des Gehirns ändern. Umgekehrt muss eine Veränderung der Aktivität des Gehirns allerdings nicht bedeuten, dass der Geist auch etwas anderes wahrnimmt. Zahlreiche Vertreter einer Supervenienzbeziehung zwischen Mentalem und Neuronalem hielten die Viele-Bewusstseine-Theorie für einen Widerspruch zum Supervenienz-Prinzip, da die gleichzeitige Existenz verschiedener Bewusstseine bei einem Menschen eine gleichzeitige Existenz verschiedener Gehirne zur Folge haben müsste. Dies wäre biologisch unmöglich.

Das Ziel von Everett, der Viele-Welten- und Viele-Bewusstseine-Theorien war, den bei der Kopenhagener Deutung vorhandenen Kollaps aus der Interpretation der Quantenmechanik herauszuhalten. So sollte eine in sich schlüssige und unkontroverse Theorie entstehen. Dies ist nicht gelungen, wie an den Einwänden anderer Physiker oder Philosophen zu sehen ist.

## 14 Putnam – ein Philosoph schaut auf die Quantenmechanik

(Anissa Zeghuzi und Henrike Gätjens)

Hilary Putnam (\*1926) ist ein amerikanischer Philosoph, der in seinem 1965 verfassten Text *A philosopher looks at quantum mechanics* [15] verschiedene Interpretationen der Quantenmechanik für unzureichend erklärt. Im Folgenden wird sein wissenschaftstheoretischer Standpunkt sowie seine Kritik an der Kopenhagener Deutung dargestellt. Putnam spricht sich klar gegen den Operationalismus aus, der besagt, dass eine physikalische Größe und deren Anwendungsbereich allein durch experimentelle Verfahren definiert werden kann. Physikalische Begriffe zu verwenden hat nichts damit zu tun, die Existenz bestimmter Größen anzunehmen. Ganz anders sieht dies der wissenschaftstheoretische Realismus, wie Putnam ihn vertritt. Elektrische Ladung etwa sei ein Teil der Realität und charakterisierbar hinsichtlich formaler Eigenschaften (die Ladung kann nur bestimmte Werte annehmen), der sie regierenden Naturgesetze und bestimmter physikalischer Effekte. Messungen sind nur eine – allerdings wichtige – Untermenge physikalischer Interaktionen [15, S. 131f], aber nicht von theoriefundierender Bedeutung.

Putnam hat drei Anforderungen an eine Interpretation der Quantenmechanik: Erstens muss sie davon ausgehen, dass ein System durch eine Messung gestört wird. Desweiteren soll dieses System als Wellenfunktion beschrieben werden, die allerdings keine physikalische Welle im Raum, sondern eine abstrakte Wahrscheinlichkeitswelle ist. Außerdem muss die Interpretation eine einheitliche Erklärung des Phänomens der Superposition liefern [15, S. 147f].

Putnam behandelt wichtige Kollaps- sowie Nicht-Kollaps-Theorien. Den Kollapstheorien zufolge kollabieren die Teilchen entweder durch Wechselwirkung mit dem Messsystem oder spontan. Die Nicht-Kollaps-Theorien kommen ganz ohne Reduktion von Superpositionen aus und führen entweder versteckte Variablen oder parallel existierende Zustände ein. Im Folgenden werden zunächst die Positionen Putnams zu Kollapstheorien dargelegt.

De Broglies Interpretation ist für Putnam unplausibel, weil sie quantenmechanische Systeme als wirkli-

che Wellen mit Teilcheneigenschaften beschreiben will [15, S. 133f]. Die Wellendarstellung scheint nur auf den ersten Blick intuitiv anschlussfähig an klassische Vorstellungen von Wellen. Allerdings sind die Amplituden jener Wellen komplex und nicht reellwertig und der Raum, in dem sich die Wellen ausbreiten, ist nicht mit dem dreidimensionalen Raum gleichzusetzen.

Max Born wiederum behauptet mit seinem *Nichtstörungsprinzip* [15, S. 138], dass die Eigenschaften einer Observablen durch eine Messung nicht verändert werden. Nach der Messung erwerbe ich lediglich genaue Kenntnis über den direkt vorher in gleicher Weise bestehenden Zustand. Die als in Superpositionen befindlich beschriebenen Zustände sind keine Zustände der Welt, sondern unserer Kenntnis bzw. Unkenntnis. Was „kollabiert“, ist nur unsere Unkenntnis: nach der Messung besitzen wir genaue Kenntnis. Welcher Wert dabei mit welcher Wahrscheinlichkeit resultiert, ist allerdings mittels der Bornschen Regel bezifferbar. Die Annahme der Nichtstörung wurde jedoch bald experimentell widerlegt.

Die Kopenhagener Deutung schließt eine Störung des Systems durch die Messung ein [15, S. 140]. Entscheidend ist der operationalistische Standpunkt Bohrs. Dieser äußert sich in der Annahme, dass ein Teilchen und seine Eigenschaften erst dann existieren, wenn man eine Messung durchführt. Davor ist es nach Bohr sinnlos, von Größen wie Geschwindigkeit, Ort oder Spin eines Teilchens zu sprechen. Das Problem der Superposition stellt sich in der Kopenhagener Deutung daher nicht, folglich bleibt die dritte Anforderung an eine Interpretation der Quantenmechanik problematisch [15, S. 144]. Zusätzlich legte Putnam in seinem späteren Text *A philosopher looks at quantum mechanics again* von 2005 [16] explizit dar, dass Bohr keine Interpretation der Quantenmechanik liefert, sondern allein den wissenschaftstheoretischen Realismus verneint. In einer Variante der Kopenhagener Deutung geht von Neu-

mann von real existierenden Zuständen in Superposition aus. Bei der Messung wird diese Superposition zerstört, um einen genauen Wert zu erhalten [16, S. 621]. Problematisch daran ist der ungeklärte Zusammenhang zwischen Schrödingerdynamik und Kollapspostulat.

Außerdem befasst sich Putnam mit der Ghirardi-Rimini-Weber-Theorie (GRW). Hier gibt es keinen äußeren Verursacher für den Kollaps. Stattdessen besteht für jedes einzelne Teilchen eine sehr geringe Wahrscheinlichkeit, in einen genau definierten Zustand zu springen. Man kann es sich bei makromolekularen Größen so vorstellen, dass sich diese Wahrscheinlichkeiten aufsummieren. Aus diesem Grund sind makromolekulare Gegenstände genau lokalisierbar und nicht unscharf. Putnam sieht die zuletzt genannte Theorie insofern im Vorteil, als sie das Problem der Lokalisierung bei makromolekularen Objekten löst [16, S. 613f]. Allerdings hat die GRW-Theorie auch Schwächen. Die Heisenbergsche Unschärferelation besagt, dass die komplementäre Größe (Impuls) unendlich unbestimmt ist, wenn ein Teilchen einen vollkommen scharfen Ortszustand annimmt. Da sie somit auch beliebig groß sein könnte, würde dies gegen den Energieerhaltungssatz verstoßen. Um dies zu vermeiden, beschränken GRW *ad hoc* die Schärfe des Ortszustands [16, S. 628f].

Die Bohmsche Theorie gehört zu den Nicht-Kollaps-Theorien mit versteckten Variablen. Das heißt, die Teilchen haben immer einen bestimmten Ort und eine Geschwindigkeit und bewegen sich nach der Schrödingergleichung. Uns sind jedoch die genauen Anfangszustände unbekannt. Die Verteilung der Anfangswerte folgt aber genau den Wahrscheinlichkeiten, welche der quantenmechanische Formalismus vorhersagt [16, S. 622f].

Putnam kommt zu dem Schluss, dass die GRW- oder die Bohmsche Theorie die aussichtsreichsten Kandidaten für eine befriedigende Interpretationen sind [16, S. 630f].

## Literaturverzeichnis

- [1] PERCY WILLIAMS BRIDGMAN: *Die Logik der heutigen Physik*. – Hueber: München, 1932.
- [2] JOHANN VON NEUMANN: *Die mathematischen Grundlagen der Quantenmechanik*. – (Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, Bd. 38.), Springer: Berlin 1932.
- [3] KARL POPPER: *Logik der Forschung*. – Wien 1935.
- [4] THOMAS S. KUHN: *Die Struktur wissenschaftlicher Revolutionen*. – Frankfurt a.M. 1967. (orig. Chicago 1962).
- [5] MAX BORN: *Zur Quantenmechanik der Stoßvorgänge*. – Z. Physik **37**(1926), S. 863–867.
- [6] ERWIN SCHRÖDINGER: *Quantisierung als Eigenwertproblem*. – Ann. d. Phys. **79**(1926), S. 361.
- [7] WERNER HEISENBERG: *Über den anschaulichen Inhalt der quantentheoretischen Kinematik und Mechanik*. – Z. Physik **43**(1927), S. 172–198.
- [8] ALBERT EINSTEIN, BORIS PODOLSKY UND NATHAN ROSEN: *Can quantum-mechanical description of physical reality be considered complete?*. – Phys. Rev. **47**(1935), S. 777–780. (in deutscher Übersetzung in: [9, S. 80–86])

- [9] KURT BAUMANN UND ROMAN U. SEXL: *Die Deutungen der Quantentheorie*. – Vieweg: Braunschweig 1984.
- [10] JOHN S. BELL: *On the Einstein Podolsky Rosen Paradox*. – *Physics* **1**(1964), S. 195. (auch in: JOHN S. BELL: *Speakable and unspeakable in quantum mechanics*. – Cambridge University Press, 1987).
- [11] A. ASPECT et al.: *Experimental test of Bell's inequalities using time-varying analyzers*. – *PRL* **49**(1982), S. 1804.
- [12] ABNER SHIMONY: *Bell's Theorem*, 2004. In: *Stanford Encyclopedia of Philosophy*, URL:<http://plato.stanford.edu>.
- [13] NIELS BOHR: *Das Quantenpostulat und die neueren Entwicklungen in der Atomistik*. – *Naturwiss.* **16**(1928), S. 245.
- [14] BRYCE DEWITT: *Quantum Mechanics and reality*. – *Phys. Today*, Sept. 1970, S. 30-35. Dt. in: [9, S. 206-220].
- [15] HILARY PUTNAM: *A philosopher looks at quantum mechanics*. In: HILARY PUTNAM: *Mathematics, Matter, and Method. Philosophical Papers*. – Vol. I. Cambridge University Press 1975, S. 130-158. (Zuerst in: ROBERT G. COLODNY [Hrsg.]: *Beyond the Edge of Certainty: Essays in Contemporary Science and Philosophy*, 1965).
- [16] HILARY PUTNAM: *A Philosopher Looks at Quantum Mechanics (Again)*. In: *The British Journal for the Philosophy of Science* **56**(2005)4, S. 615–634.