1 Mathematische Vorbereitung zur DSA 2006

Mathematische Vorbereitung zum Kurs 2.1 *Quanten – Mathematik und Philosophie einer physikalischen Idee* der Deutschen Schülerakademie 2006 in Braunschweig geleitet von Christian Ströbele und Thomas Neusius.

Überarbeitete Fassung, Stand: 3. September 2006. Thomas Neusius

Inhaltsverzeichnis

1.1 Mengen

Eine Menge ist eine Ansammlung von verschiedenen Elementen. Zum Beispiel:

$$\{\text{Pferd, Schwein, Hase}\}$$

Wir schreiben die Elemente einer Menge in geschwungene Klammern. Identische Elemente werden jeweils nur einmal gezählt, also gilt

$$\{\text{Pferd, Schwein, Hase, Schwein}\} = \{\text{Pferd, Schwein, Hase}\}.$$

Damit man nicht immer alle Elemente einer Menge aufschreiben muß, gibt man manchen Mengen einen Namen:

$$M = \{\text{Pferd, Schwein, Hase}\}.$$

Dies bedeutet, daß die Menge M genau aus den Tieren Pferd, Schwein und Hase besteht. Man kann Mengen auch durch die Angabe definieren, welche Eigenschaften die Elemente besitzen sollen. Zum Beispiel sei T die Menge aller Tierarten. Um sich das Aufschreiben etwas zu erleichtern, schreibt man diese Aussage kurz als

$$T = \{x|x \text{ ist eine Tierart}\}.$$

Dies bedeutet, daß genau dann ein x Element der Menge T ist, wenn x eine Tierart ist.

Manchmal betrachtet man auch Teilmengen, also Mengen, die in einer anderen Menge enthalten sind. Wir legen zum Beispiel fest, daß V die Menge aller Vogelarten ist

$$V = \{x|x \text{ ist eine Vogelart}\}.$$

Nun sind alle Vogelarten auch Tierarten, also gilt, daß alle Elemente x in der Menge V auch Elemente der Menge T sind. Dies schreibt man kurz in folgender Art auf

$$\text{Für alle } x \in V \Rightarrow x \in T.$$

Dort steht, daß für alle x, die Elemente von V sind, folgt („$\Rightarrow$“), daß sie auch Elemente von T sind. Diese Eigenschaft der Menge V meint man, wenn man sagt, V sei Teilmenge von T. Die kurze Notation dafür sieht so aus

$$V \subset T.$$

Eine Eigenschaft einer Menge ist die Zahl ihrer Elemente. Es gibt endliche Mengen, die also eine begrenzte Zahl von Elementen besitzen. Zum Beispiel die obige Menge

$$M = \{\text{Pferd, Schwein, Hase}\},$$

welche aus drei Elementen besteht. Es gibt aber auch unendliche Mengen, wie zum Beispiel die Menge der möglichen Buchstabenkombinationen. Besonderes Interesse gilt in der Mathematik den Mengen, die Zahlen enthalten. Solche Mengen sind oft unendlich. Ab jetzt wird es besonders um Mengen in der Mathematik gehen, wie die Zahlen. Wenn im folgenden von Mengen, ihren Elementen und Verknüpfungen die Rede ist, so geschieht dies in einem abstrakten Sinn: Wenn nur von einer Menge M die Rede ist, ohne daß gesagt welche Elemente M enthält, so heißt dies, daß die Aussage für jede Menge gilt, egal welche Elemente sie enthält.

Mengen können weitere Eigenschaften haben. Zum Beispiel gibt es Mengen, deren Elemente bestimmte Beziehungen zueinander besitzen: Zwei Elemente können verknüpft werden, so daß dies wieder einem Element der Menge entspricht:

$$a, b \in M \text{ und } a \odot b =: c \Rightarrow c \in M$$

Für die Zahlen gibt es zum Beispiel die Addition oder die Multiplikation, welche zwei Zahlen miteinander so verknüpft, daß wieder eine Zahl daraus wird.

1.2 Abbildungen und Funktionen

Wenn man eine oder mehrere Mengen hat, kann man *Zuordnungen* definieren, in dem man einige Elemente mit anderen verbindet. Aus der Schule kennt Ihr wahrscheinlich die Funktionen auf den reellen Zahlen[1].

Definition 1 *Seien M und N Mengen, so heißt eine Zuordnung, die allen Elementen einer Teilmenge T von M ($T \subset M$) genau ein Element in N zuordnet,* Funktion *auf der Menge T. Die Menge T wird auch* Definitionsmenge *genannt. Wir schreiben eine Funktion mit dem Namen f folgendermaßen auf*

$$\begin{aligned} f: \qquad & T \to N \\ & x \longmapsto f(x). \end{aligned}$$

Man sagt: „ein Element x aus T, wird von der Funktion f auf den Wert *$f(x)$ abgebildet, welcher in der Menge N liegt.“ N heißt* Zielmenge.

Bitte beachtet, daß man weder weiß, ob alle Elemente in N einem Element von T zugeordnet sind, noch, ob manche Elemente in N von zwei verschiedenen Elementen in T „erreicht“ werden.

Oft betrachtet man in der Mathematik Funktionen von einer bestimmten Zahlenmenge auf eine Zahlenmenge. Dabei können die Menge, auf der die Funktion definiert ist, und die Zielmenge auch die gleichen Mengen sein.

Definition 2 *Seien M und N Teilmengen der reellen Zahlen*[2]*. Eine Funktion $f : M \to N$, die die folgende Eigenschaft hat, heißt* linear*: Für alle x und y aus dem Definitionsbereich und zwei weitere beliebige reelle Zahlen a und b gilt:*

$$f(ax + by) = af(x) + bf(y). \tag{1}$$

Dies erlaubt ein sehr einfaches Rechnen mit der Funktion, denn man kann nun alle Verknüpfungen der Definitionsmenge auf die Zielmenge übertragen und umgekehrt.

Beispiel:

- Die Funktion $f_1(x) = 4x$ ist linear.
- Die Funktion $f_2(x) = 4x + 1$ ist nicht linear.
- Die Funktion $f_3(x) = x^2$ ist nicht linear.

[1] Was die reellen Zahlen sind, wird nochmal in Kapitel 1.3 erklärt.

[2] M und N können auch Teilmengen von Vektorräumen sein. Was ein Vektorraum ist, wird in Abschnitt 1.4 erklärt.

Mehr Beispiele von linearen Funktionen werden später eingeführt werden.

Aufgabe 1 *Beweise, daß obige Beispiele linear/nicht linear sind.*

Aufgabe 2 *Welche Form müssen lineare Funktionen im allgemeinen besitzen? Kannst Du zum Beispiel sagen, wie der Graph einer linearen Funktion in einem kartesischen Koordinatensystem aussieht?*

1.3 Zahlen

Die natürlichen, ganzen, rationalen und reellen Zahlen sind Euch wahrscheinlich aus dem Mathematikunterricht bekannt. Stellt Euch dennoch vor, wir würden nur die natürlichen Zahlen

$$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, ...\}$$

kennen.

Wenn außerdem die Rechenoperation Addition[3] bekannt ist, so kann man Gleichungen der Art

$$a + b = c \tag{2}$$

betrachten, wobei a, b, c natürliche Zahlen sein sollen (dafür schreibt man kurz $a, b, c \in \mathbb{N}$). Was an den natürlichen Zahlen unbefriedigend ist, ist die Tatsache, daß man für bestimmte Paare (a, c) kein $b \in \mathbb{N}$ finden kann, so daß die Gleichung stimmt. Zum Beispiel

$$5 + b = 3.$$

Immer wenn $a \geq c$ ist, gibt es keine natürliche ganze Zahl b, die die Gleichung (2) löst. Deswegen *definiert* man neue Zahlen, die eine Lösung der Gleichung für alle möglichen Paare (a, c) garantieren. Dies sind die negativen Zahlen (und Null), die zusammen mit den natürlichen Zahlen die *ganzen Zahlen* bilden

$$\mathbb{Z} = \{..., -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, ...\}.$$

Nun hat Gleichung (2) nicht nur für alle Paare von *natürlichen* Zahlen (a, c) eine Lösung, sondern sogar für alle möglichen Paare von *ganzen* Zahlen.

Denken wir nun an die Rechenoperation der Multiplikation

$$a \cdot b = c. \tag{3}$$

Für ein Paar von ganzen Zahlen (a, c) gibt es auch hier nicht immer eine Lösung b, die selbst eine ganze Zahl ist, z. B.

$$3 \cdot b = 2.$$

Nur wenn a Teiler von c ist, gibt es ein $b \in \mathbb{Z}$, das Gleichung (3) erfüllt. Um immer eine Lösung zu finden, werden die rationalen Zahlen $\mathbb{Q}$ eingeführt, also die Zahlen, die als Bruch zweier ganzer Zahlen geschrieben werden können, wobei es keine Brüche mit dem Nenner Null gibt. Die Gleichung (3) kann nun sogar für jedes Paar von rationalen Zahlen (a, c) gelöst werden. Andererseits findet man zu jeder Bruchzahl b ein Paar (a, c), so daß nur dieses b die Gleichung (3) löst. Man kann also aus der Forderung, daß Gleichung (3) eine Lösung haben muß, die Menge der *rationalen* Zahlen konstruieren.

Nun betrachtet man Gleichungen der Art

$$a \cdot a = a^2 = b. \tag{4}$$

Diese Gleichungen, in denen eine Zahl mehrfach mit sich selbst multipliziert wird, haben wiederum nur in besonderen Fällen eine Lösung. Hier muß beispielsweise b ein Bruch sein, der vollständig gekürzt im Zähler und Nenner eine Quadratzahl enthält. Im allgemeinen kann man aber nicht annehmen, daß es in $\mathbb{Q}$ eine Lösung a zu einem vorgegebenen b gibt. Da das Produkt zweier rationaler Zahlen immer positiv ist, nimmt man an, daß b seinerseits größer als Null ist. Führt man nun die reellen Zahlen $\mathbb{R}$ ein, so kann man die Gleichung (4) für alle positiven b lösen. Auch andere Gleichungen mit anderen Exponenten haben dann eine Lösung in $\mathbb{R}$, z. B.

$$\begin{aligned} a \cdot a \cdot a = a^3 &= b \\ a^2 + \frac{7}{3}a^5 &= b \\ \text{usw.} \end{aligned}$$

Allerdings gibt es in den reellen Zahlen auch solche, die nicht als Lösung einer Gleichung mit verschiedenen Exponenten gewonnen werden können. Die Zahl π, definiert als das Verhältnis von Kreisumfang zum Kreisdurchmesser, erfüllt keine solche Gleichung. Das zeigt, daß die Einführung der reellen Zahlen anders ist, als die der ganzen oder der rationalen Zahlen.

Vereinfacht kann man sagen: Wir führen die reellen Zahlen ein, weil es auf der Zahlengeraden noch „Lücken“ gibt.

Betrachtet man nun die Art von Zahlen, die wir bisher gefunden haben, auf einem Zahlenstrahl bzw. einer Zahlenleiste: Die ganzen Zahlen bilden, wenn man sie graphisch in einer Linie aufträgt, einzelne Punkte mit festem Abstand zweier benachbarter Zahlen. Sie sind nur in einer Richtung unendlich. Nimmt man die negativen Zahlen hinzu, hat man nach beiden Seiten unendlich viele, aber immer noch mit festen Abständen. Man sagt zur Eigenschaft, daß die Zahlen sich nicht „nahe kommen“, die ganzen Zahlen seien eine *diskrete* Menge. Wenn man nun die rationalen Zahlen hinzunimmt, liegen zwischen je zwei beliebig nahen von ihnen immer noch weitere rationale Zahlen. Deswegen sind die rationalen Zahlen *dicht* und nicht diskret. Aber wir haben bereits gesehen, daß die rationalen Zahlen noch Lücken lassen, nämlich dort, wo die reellen Zahlen, wie z. B. $\sqrt{2}$ oder π sitzen. Die reellen Zahlen lassen aber keine Lücken mehr auf dem Zahlenstrahl, sie sind *vollständig* und *kontinuierlich*.

Dennoch gibt es ein Problem: Die Gleichung der Art

$$a^2 = b$$

haben für negative b keine Lösung a in den reellen Zahlen.

Wir führen nun eine neue Zahl per definitionem ein:

[3]Wenn weiter unten die negativen Zahlen eingeführt werden, kann die Subtraktion als Addition einer negativen Zahl betrachtet werden. Deswegen wird sie hier nicht gesondert behandelt.

Definition 3 *Es sei* i *die Zahl, deren Quadrat gleich* -1 *ist:*

$$\mathrm{i}^2 = -1.$$

Die Zahl i wird *imaginäre Einheit* genannt. Wir haben schon gesehen, daß für i kein Platz mehr auf der Zahlengeraden ist, da dort nur reelle Zahlen liegen. Deswegen muß man davon ausgehen, daß es sich bei der imaginären Einheit um eine Zahl handelt, die grundsätzlich anders ist, als die reellen Zahlen.

Wir untersuchen nun die Rechenregeln, die sich für die Zahl i ergeben, wenn verlangt wird, daß sich die Rechenregeln, die für die reellen Zahlen gelten, auf die Zahlen der imaginären Art übertragen. Es ist klar, daß zwei imaginäre Zahlen, wenn man sie miteinander multipliziert, eine reelle Zahl ergeben können ($\mathrm{i}^2 = -1$), und man nimmt an, daß sich imaginäre Zahlen als mathematische Objekte addieren lassen:

$$\mathrm{i} + \mathrm{i} = 2\mathrm{i}.$$

Wenn diese Regel sinnvoll sein soll, so muß ganz allgemein für reelle Zahlen $r_1, r_2 \in \mathbb{R}$

$$r_1\mathrm{i} + r_2\mathrm{i} = (r_1 + r_2)\mathrm{i}$$

gelten. Wenn die Gleichung $-1 = \mathrm{i}^2$ mit einer reellen Zahl $r \in \mathbb{R}$ multipliziert wird, erhält man

$$-r = r\mathrm{i}^2 = (\sqrt{r}\mathrm{i}) \cdot (\sqrt{r}\mathrm{i}) = (\sqrt{r}\mathrm{i})^2.$$

Dies bedeutet, wir können unter der Wurzel mit negativen Zahlen so rechnen, wie wir es auch sonst tun:

$$\sqrt{-ab} = \sqrt{-1}\sqrt{a}\sqrt{b} = \mathrm{i}\sqrt{a}\sqrt{b}$$

Man addiert die imaginären Zahlen einfach zu den reellen, ohne daß sich an der reellen Natur und der imaginären Natur etwas ändert:

$$(a_1 + \mathrm{i}a_2) + (b_1 + \mathrm{i}b_2) = (a_1 + b_1) + \mathrm{i}(a_2 + b_2).$$

Wir nennen in der Zahl $\alpha = (a_1 + \mathrm{i}a_2)$ den ersten Teil a_1 den *Realteil*, a_2 heißt *Imaginärteil*. Zahlen, die so zusammengesetzt sind, heißen *komplexe Zahlen* und ihre Gesamtheit wird mit dem Symbol $\mathbb{C}$ abgekürzt. Symbolisch heißt das

$$\mathbb{C} := \{\alpha = a_1 + a_2\mathrm{i} | a_1, a_2 \in \mathbb{R}\}$$

Es fehlt noch die Definition der Multiplikation in den komplexen Zahlen, die man aber sehr leicht finden kann:

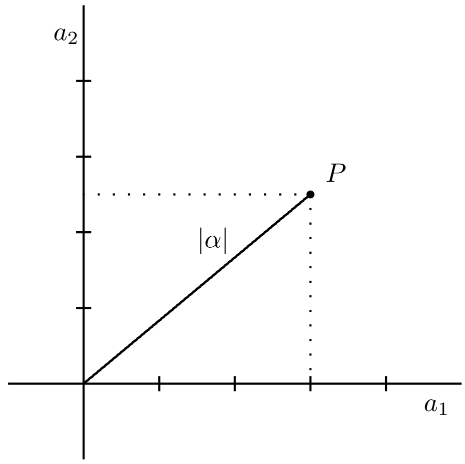
$$\begin{aligned}(a_1 + \mathrm{i}a_2)(b_1 + \mathrm{i}b_2) &= a_1b_1 + \mathrm{i}a_2b_1 + \mathrm{i}a_1b_2 + \mathrm{i}^2a_2b_2 \\ &= (a_1b_1 - a_2b_2) + \mathrm{i}(a_2b_1 + a_1b_2).\end{aligned}$$

Aufgabe 3 *Beweise die Kommutativität*[4] *der obigen Definition der Multiplikation.*

Die komplexen Zahlen lassen nicht nur das Wurzelziehen für negative Zahlen zu. Man kann beweisen, daß für beliebige komplexe Zahlen $r \in \mathbb{C}$ und natürliche Zahlen $n \in \mathbb{N}$ die Gleichung

$$a^n = r$$

eine Lösung $a \in \mathbb{C}$ besitzt.



Da komplexe Zahlen zwei Komponenten, nämlich Real- und Imaginärteil besitzen, können sie nicht auf einer Zahlengeraden dargestellt werden. Sie können aber als Punkte einer Ebene graphisch dargestellt werden. In dieser Ebene (Gaußsche Ebene) bilden die reellen Zahlen eine Gerade, rechtwinkelig dazu steht die Gerade der Imaginären Zahlen, also solcher Zahlen, deren Realteil gleich Null ist (sozusagen bilden die reellen Zahlen die x-Achse, die rein imaginären Zahlen bilden die y-Achse). Alle sonstigen Zahlen haben sowohl einen von Null verschiedenen Real- als auch einen von Null verschiedenen Imaginärteil. Zu jeder komplexen Zahl $\alpha = a_1 + \mathrm{i}a_2$ findet man eine Zahl $a_1 - \mathrm{i}a_2$, die man das *komplex Konjugierte* nennt und mit α^* bezeichnet.

Der Betrag einer komplexen Zahl ist der Abstand zum Ursprung, wie auch bei reellen Zahlen. Der Punkt $(x|y)$ in der Ebene, hat vom Ursprung den Abstand

$$d = \sqrt{x^2 + y^2},$$

wie man mit dem Satz des Pythagoras zeigen kann. Deswegen gilt für komplexe Zahlen

$$|\alpha| = |a_1 + \mathrm{i}a_2| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2}.$$

Der Betrag ist immer eine reelle Zahl. Er kann auch berechnet werden durch

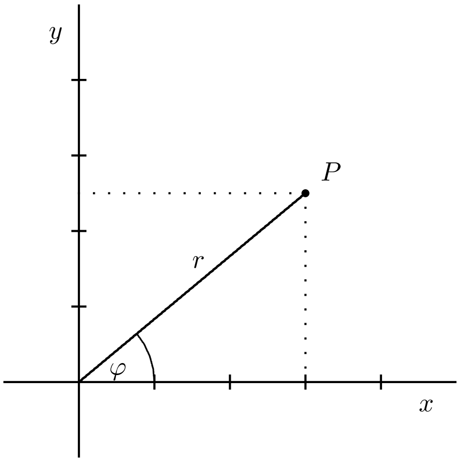
$$|\alpha| = \sqrt{\alpha\alpha^*} = \sqrt{(a_1 + \mathrm{i}a_2)(a_1 - \mathrm{i}a_2)}.$$

Nun wollen wir noch einen genaueren Blick auf die Gaußsche Zahlenebene werfen. Dazu betrachten wir sogenannte Polarkoordinaten.

Definition 4 *Einen Punkt in der Ebene mit den kartesischen Koordinaten x und y kann auch durch die Angabe seines Abstandes r vom Ursprung (Punkt $(0;0)$) und dem Winkel*[5] *φ zwischen der x-Achse und der Verbindungslinie von Punkt und Ursprung angegeben werden. Diese Koordinaten heißen* Polarkoordinaten.

[4]Die Multiplikation zweier Elemente a und b einer Menge M heißt *kommutativ*, falls gilt $a \cdot b = b \cdot a$

[5]Alle Winkel werden im Bogenmaß gemessen $360° = 2\pi$.



Wie Ihr Euch an der Zeichnung klarmachen könnt, gelten für die kartesischen Koordinaten eines Punktes (x, y) folgende Beziehungen zu den Polarkoordinaten:

$$\begin{aligned} x &= r\cos\varphi, \\ y &= r\sin\varphi, \end{aligned}$$

wobei r der Betrag der komplexen Zahl ist $|x + \mathrm{i}y| = r = \sqrt{x^2 + y^2}$. Nun zurück zu den komplexen Zahlen. Wenn man die „Einheiten“ der x-Achse in reellen und die der y-Achse in imaginären Einheiten zählt, also $x = a_1$ und $y = a_2$ setzt, dann können wir eine komplexe Zahl schreiben als

$$\alpha = a_1 + \mathrm{i}a_2 = r(\cos\varphi + \mathrm{i}\sin\varphi). \tag{5}$$

Die Multiplikation zweier komplexer Zahlen ergibt für die Polarkoordinaten

$$\begin{aligned} ab &= |a|(\cos\alpha + \mathrm{i}\sin\alpha)|b|(\cos\beta + \mathrm{i}\sin\beta) \\ &= |ab|[(\cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta) + \\ &\quad +\mathrm{i}(\cos\alpha\sin\beta + \sin\alpha\sin\beta)] \end{aligned}$$

Andererseits ist das Produkt ab gleich einer anderen komplexen Zahl, die wir c nennen:

$$ab =: c = |c|(\cos\gamma + \mathrm{i}\sin\gamma). \tag{6}$$

Mit den Additionstheoremen für den Sinus und Kosinus (findet Ihr in Eurer Formelsammlung) kann man den Ausdruck für ab noch weiter umformen:

$$|ab|\,[\cos(\alpha + \beta) + \mathrm{i}\sin(\alpha + \beta)] = |c|(\cos\gamma + \mathrm{i}\sin\gamma) \tag{7}$$

Wenn man den Ausdruck (6) mit (7) vergleicht, ist ersichtlich, daß das Produkt zweier komplexer Zahlen einen Betrag hat, der das Produkt der Beträge der beiden Faktoren ist $|c| = |ab|$. Es hat einen Polarwinkel, der genau die Summe der beiden Polarwinkel der Faktoren ist $\gamma = \alpha + \beta$.

Wenn man die Multiplikation von zwei komplexen Zahlen mit dem Betrag eins als Funktion des Polarwinkels aufschreibt, so erhält man

$$f(\alpha)f(\beta) = f(\alpha + \beta).$$

Es gibt genau eine Funktion, die die Eigenschaft hat, daß das Produkt der Funktionswerte zu α und β gleich dem Wert zum Argument $\alpha + \beta$ ist: die Exponentialfunktion.

$$\mathrm{e}^{\alpha}\mathrm{e}^{\beta} = \mathrm{e}^{\alpha+\beta}.$$

Deswegen definiert man die komplexe Exponentialfunktion als

$$\cos\varphi + \mathrm{i}\sin\varphi =: \mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}.$$

Damit schreibt man das Produkt von vorhin als

$$\begin{aligned} ab &= |a|(\cos\alpha + \mathrm{i}\sin\alpha)|b|(\cos\beta + \mathrm{i}\sin\beta) \\ &= |a|\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha}|b|\mathrm{e}^{\mathrm{i}\beta} \\ &= |ab|\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\alpha+\beta)}. \end{aligned}$$

Da $\alpha + \beta = \gamma$ und $|ab| = |c|$ gilt

$$\begin{aligned} ab &= |c|\mathrm{e}^{\mathrm{i}\gamma} \\ &= c. \end{aligned}$$

Diese Definition erlaubt es, die Exponentialfunktion für alle komplexen Zahlen zu definieren, sie verträgt sich mit der Definition der Exponentialfunktion in den reellen Zahlen.

Im folgenden wird nur noch von reellen Zahlen gesprochen, obwohl es grundsätzlich möglich wäre, auch hier komplexe Zahlen zu verwenden.

1.4 Vektoren und Vektorräume

Bei den komplexen Zahlen hatten wir bereits gesehen, daß es Mengen gibt, deren Elemente aus mehreren Zahlenkomponenten bestehen. Solche Objekte werden uns im folgenden Abschnitt noch etwas näher interessieren. Allerdings werden die Rechenregeln einfacher sein, als bei der Definition der komplexen Zahlen.

Wir betrachten nun Mengen, deren Elemente bestimmte Eigenschaften haben sollen:

Definition 5 *Sei M eine Menge. Die Elemente von M werden hier mit einem Pfeil gekennzeichnet, z. B. $\vec{a}$, um Verwechselungen mit den Zahlen zu vermeiden. Es gebe für die Elemente von M eine Verknüpfung, die man Addition nennt.*

1. *Die Addition zweier Elemente aus M ergibt wieder ein Element in M, sie ist assoziativ und kommutativ:*

$$\text{Für alle } \vec{a}, \vec{b} \in M \Rightarrow \vec{a} + \vec{b} = \vec{c} \in M. \tag{8}$$

2. *Wir können die Elemente aus M mit reellen Zahlen multiplizieren*

$$\text{Für alle } r \in \mathbb{R} \text{ und alle } \vec{a} \in M \Rightarrow r\vec{a} \in M. \tag{9}$$

Dabei soll gelten:

$$\begin{aligned} r\vec{a} + s\vec{a} &= (r + s)\vec{a}, \\ r(s\vec{a}) &= (rs)\vec{a}, \\ r(\vec{a} + \vec{b}) &= r\vec{a} + r\vec{b}, \\ 1\vec{a} &= \vec{a}. \end{aligned}$$

3. *Es gibt in M ein Element $\vec{0}$, das bei der Addition das andere Element unverändert läßt:*

$$\text{Für alle } \vec{a} \in M \text{ gilt } \vec{a} + \vec{0} = \vec{a}. \tag{10}$$

Diese Element heißt neutrales Element *oder* Nullvektor.

4. *Es gibt in M für jedes Element $\vec{a}$ ein Element $\vec{b}$, so daß die Summe das neutrale Element ergibt:*

   Für alle $\vec{a} \in M$ gibt es $\vec{b} \in M$ so daß $\vec{a} + \vec{b} = \vec{0}$. (11)

   Diese Element heißt inverses Element zu $\vec{a}$ *und wird mit $\vec{a}^{-1}$ bezeichnet.*

Falls diese Bedingungen auf M zutreffen, dann nennt man M einen Vektorraum. *Die Elemente von M werden dann* Vektoren *genannt.*

Beispiel: Die reellen Zahlen bilden einen Vektorraum, ebenso die komplexen Zahlen. Die ganzen Zahlen bilden keinen Vektorraum nach unserer Definition, da gegen (9) verstoßen wird.

Nun bildet man eine Menge aus Elementen, die verschiedene Komponenten enthalten. Die Menge V^2 enthalte alle geordneten Paare von reellen Zahlen, die wir untereinander schreiben:

$$V^2 := \{\vec{x} | \vec{x} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \text{ mit } a, b \in \mathbb{R}\}.$$

Die Addition definiert man komponentenweise, also

$$\vec{a} + \vec{b} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 + b_1 \\ a_2 + b_2 \end{pmatrix}.$$

Die Multiplikation mit reellen Zahlen r wird ebenso auf jede Komponente angewendet:

$$r\vec{a} = r \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ra_1 \\ ra_2 \end{pmatrix}.$$

Damit ist V^2 ein Vektorraum. Dieser Vektorraum, der aus Elementen besteht, die aus Paaren von reellen Zahlen gebildet werden, wird normalerweise mit $\mathbb{R}^2$ bezeichnet. Wenn man sogar drei Komponenten zuläßt, wobei Multiplikation mit reellen Zahlen und Addition wieder komponentenweise definiert sind, erhält man den Vektorraum $\mathbb{R}^3$. Der Vektorraum $\mathbb{R}^2$ kann problemlos auf Papier gezeichnet werden, in dem man jeden Vektor mit dem Punkt in einem Koordinatensystem identifiziert, der die gleichen Komponenten (als x- und y-Koordinatnen) besitzt. Auch den $\mathbb{R}^3$ kann man sich bildlich vorstellen. Schließlich leben wir ja in einem Raum, den wir gewöhnlich mit drei Raumkoordinaten (z. B. vorne-hinten, links-rechts, unten-oben) beschreiben. Obwohl wir es uns dann nicht mehr so einfach vorstellen können, hindert uns nach unserer Definition nichts daran, auch Vektoren mit mehr als drei Komponenten einzuführen. Wir addieren und multiplizieren einfach komponentenweise. Dies könnten zum Beispiel die Kontostände der Kunden einer Bank sein. Der Kontostand von Kunde 1 wird in der ersten Komponente eingetragen, der von Kunde 2 in der zweiten Komponente usw. Die möglichen Kontostände aller Kunden bei beliebig vielen Banken bilden dann einen Vektorraum. Ein Zahlenbeispiel mit fünf Komponenten:

$$\vec{a} + r\vec{b} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \\ a_5 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ b_4 \\ b_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 + rb_1 \\ a_2 + rb_2 \\ a_3 + rb_3 \\ a_4 + rb_4 \\ a_5 + rb_5 \end{pmatrix}.$$

Umgekehrt kann man zeigen, daß alle Vektorräume durch Listen von Komponenten darstellbar sind. Wenn man über Vektorräume spricht, will man sich häufig nicht festlegen, wieviele Dimensionen der Vektorraum haben soll. Dann schreibt man einfach $\mathbb{R}^n$ mit einer natürlichen Zahl n.

Durch das Addieren zweier Vektoren oder das Multiplizieren mit einer reellen Zahl, lassen sich andere Vektoren „erzeugen". Seien $r_1, r_2 \in \mathbb{R}$ und $\vec{a}, \vec{b} \in V$, wobei V ein Vektorraum ist, so erhält man durch

$$r_1\vec{a} + r_2\vec{b} = \vec{c}$$

einen anderen Vektor $\vec{c}$ in V. Werden verschiedene Vektoren mit reellen Zahlen multipliziert und dann addiert, so spricht man von einer *Linearkombination* dieser Vektoren.

Man nimmt nun an, es gäbe eine kleine Zahl von Vektoren in einem Vektorraum, aus denen man alle Vektoren im Vektorraum V erzeugen kann.

Definition 6 *Eine Menge von Vektoren $T \subset V$, die den ganzen Vektorraum V durch Linearkombination ihrer Elemente hervorbringt, heißt* erzeugende Menge.

Der Vektorraum selbst ist beispielsweise ein erzeugendes System. Aber es gibt auch sehr viel kleinere erzeugende Systeme. Der Vektorraum $\mathbb{R}^2$ wird von der Menge

$$T = \{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \end{pmatrix}\}$$

erzeugt. Es ist also deutlich, daß es *verschiedene* erzeugende Mengen geben kann. Wenn ein Vektor durch eine Linearkombination anderer Vektoren erzeugt werden kann, so sagt man, dieser Vektor sei *linear abhängig* von diesen anderen Vektoren, anderenfalls sagt man, er sei *linear unabhängig.*

Satz 1 *Eine Menge von Vektoren $\{\vec{a_1}, \vec{a_2}, ..., \vec{a_n}\}$ ist genau dann untereinander linear unabhängig, wenn die Gleichung*

$$\alpha_1\vec{a}_1 + \alpha_2\vec{a}_2 + ... + \alpha_n\vec{a}_n = \vec{0} \tag{12}$$

nur erfüllbar ist, wenn alle reellen Zahlen $\alpha_i \in \mathbb{R}$ gleich Null sind.

Beweis: Angenommen, es gäbe eine Möglichkeit, einen der Vektoren durch eine Linearkombination der anderen darzustellen. Dann wäre also zum Beispiel

$$\vec{a}_1 = \beta_2\vec{a}_2 + \beta_3\vec{a}_3 + ... + \beta_n\vec{a}_n.$$

Man kann also Gleichung (12) dadurch erfüllen, daß man $\alpha_1 = 1$ setzt und alle übrigen Koeffizienten durch $\alpha_i = -\beta_i$ für alle $i \in \{2, 3, 4, ..., n\}$ festlegt. Dann gälte Gleichung (12) für Koeffizienten ungleich Null. Wenn aber umgekehrt die α_i alle gleich Null sein müssen, damit Gleichung (12) gilt, dann sind die Vektoren $\vec{a}_i$ untereinander linear unabhängig.

Wenn Gleichung (12) erfüllbar ist durch Koeffizienten α_i die ungleich Null sind, so wählt man einen der Vektoren aus, deren Koeffizient ungleich Null ist (wir nehmen an, daß dies beim ersten Vektor $\vec{a}_1$ der Fall ist), und subtrahiert ihn auf beiden Seiten der Gleichung (12)

$$\alpha_2\vec{a}_2 + ... + \alpha_n\vec{a}_n = -\alpha_1\vec{a}_1.$$

Da $-\alpha_1 \neq 0$, wie angenommen, kann nun durch $-\alpha_1$ dividiert werden und man erhält

$$-\frac{\alpha_2}{\alpha_1}\vec{a}_2 - \frac{\alpha_2}{\alpha_1}\vec{a}_2 ... - \frac{\alpha_n}{\alpha_1}\vec{a}_n = \vec{a}_1.$$

Daraus ist ersichtlich, daß $\vec{a}_1$ als Linearkombination der übrigen Vektoren darstellbar wäre. Wenn man also annimmt, daß die Vektoren $\vec{a}_i$ linear unabhängig sind, so folgt, daß Gleichung (12) nur für $\alpha_i = 0$ für alle $i \in \{1, 2, 3, ..., n\}$ erfüllt sein kann. *qed.*

Man interessiert sich nun für erzeugende Mengen, deren Vektoren linear unabhängig sind.

Definition 7 *Eine erzeugende Menge von linear unabhängigen Vektoren heißt* Basis *des Vektorraumes V. Die Zahl der darin vorkommenden Vektoren heißt die* Dimension *des Vektorraumes.*

Satz 2 *Eine endliche erzeugende Menge enthält immer eine Basis.*

Beweis: Sei T unsere erzeugende Menge des Vektorraumes V. Wir gehen nun folgendermaßen vor: Wir nehmen einen ersten Vektor $\vec{a}_1$, der nicht der Nullvektor ist. Nun entfernt man alle Vektoren aus T, die als Multiplikation von $\vec{a}_1$ mit reellen Zahlen darstellbar sind. Wenn die verbleibende Menge nur noch $\vec{a}_1$ enthält, so hat man einen eindimensionalen Vektorraum und die Basis besteht nur aus $\vec{a}_1$. Anderenfalls findet man einen von Null verschiedenen Vektor $\vec{a}_2$. Dieser muß linearunabhängig von $\vec{a}_1$ sein, sonst hätte man ihn bereits entfernt. Man entfernt nun zusätzlich alle Vektoren aus T, die als Linearkombination dieser beiden Vektoren $\vec{a}_1$ und $\vec{a}_2$ darstellbar sind. Enthält die Menge nun nur noch $\vec{a}_1$ und $\vec{a}_2$, so ist man fertig, anderenfalls fährt man solange fort, bis die Menge nur noch linear unabhängige Vektoren enthält. Da nur endlich viele Elemente in der Menge enthalten sind, kommt man so zu einer Basis. *qed.*

In der Definition des Begriffs *Vektorraum* wurde keine Annahme über die Dimension eines Vektorraumes gemacht. Prinzipiell könnte ein Vektorraum auch eine unendliche Zahl von Dimensionen haben. Dann kann es natürlich keine endliche erzeugende Menge geben. Der Beweis, daß auch dann eine Basis existiert, ist aber sehr kompliziert.

Auf Vektorräumen kann man noch ein sogenanntes Skalarprodukt definieren:

Definition 8 *Seien $\vec{a}, \vec{b} \in \mathbb{R}^n$. Dann defiert man folgende Verknüpfung*

$$S(\vec{a}, \vec{b}) = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \end{pmatrix} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + ... = \sum_{i=1}^{n} a_i b_i,$$

die Skalarprodukt *von $\vec{a}$ und $\vec{b}$ genannt wird.*[6]

Das Skalarprodukt ist eine Verknüpfung, die je zwei Vektoren eine reelle Zahl zuordnet. Dabei hat es folgende Eigenschaften:

- Wir können mit reellen Zahlen ins Skalarprodukt multiplizieren:

$$rS(\vec{a}, \vec{b}) = S(r\vec{a}, \vec{b}) = S(\vec{a}, r\vec{b})$$

- Wir können Summen auflösen:

$$S(\vec{a} + \vec{b}, \vec{c}) = S(\vec{a}, \vec{c}) + S(\vec{b}, \vec{c})$$

und

$$S(\vec{a}, \vec{b} + \vec{c}) = S(\vec{a}, \vec{b}) + S(\vec{a}, \vec{c}).$$

Dies zeigt, daß das Skalarprodukt in beiden Argumenten (erster und zweiter Vektor) linear ist. Man nennt es deswegen eine *Bilinearform*. Vektorräume, die die Definition eines Skalarproduktes ermöglichen, wie zum Beispiel die Räume $\mathbb{R}^n$ sind in der Quantenmechanik von besonderer Bedeutung. Man schreibt das Skalarprodukt in den Vektorräumen $\mathbb{R}^n$ gewöhnlich als Produkt

$$S(\vec{a}, \vec{b}) = \vec{a} \bullet \vec{b}.$$

1.5 Matrizen

Eine Matrix ist ein Zahlenschema, das aus Spalten und Zeilen besteht, z. B.

$$\begin{pmatrix} 3 & 7 & 9 \\ 7 & 4 & 1 \\ 0 & 3 & 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \\ e & f \\ g & h \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 5 & 7 & 9 \end{pmatrix}.$$

Vektoren sind ein Spezialfall von Matrizen. Um zu beschreiben, wie man mit Matrizen rechnet, benutzt man häufig eine Kurzschreibweise. Man schreibt $A = (a_{ik})_{i=1,2,...,m;k=1,2,...,n}$ um auszudrücken, daß die Matrix A eine Matrix mit m Zeilen und n Spalten ist, deren Eintrag in der i-ten Zeile und k-ten Spalte a_{ik} ist. Die Menge aller Matrizen mit m Zeilen und n Spalten wird $\mathbb{R}^{m \times n}$ genannt. Zwei Matrizen können addiert werden, wenn gilt, daß beide Elemente im selben Raum $\mathbb{R}^{m \times n}$ sind. Die Addition erfolgt komponentenweise. Die Multiplikation zweier Matrizen ist möglich, wenn die Zahl der Spalten der ersten Matrix gleich der Zahl der Zeilen der zweiten Matrix ist, also wenn $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ und $B \in \mathbb{R}^{n \times k}$. Das Ergebnis einer solchen Multiplikation ist eine neue Matrix $C \in \mathbb{R}^{m \times k}$, also eine Matrix, die soviele Zeilen, wie die erste und so viele Spalten wie die zweite Matrix hat. Die Regel für die Multiplikation lautet

$$\begin{aligned} AB &= (a_{ij})_{i=1,..,m;j=1,...,n} (b_{ts})_{t=1,...,n;s=1,...,k} \\ &= (\sum_{j=1}^{n} a_{ij} b_{js})_{i=1,..,m;s=1,...,k}. \end{aligned}$$

Dies zeigt das folgende Beispiel:

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 7 & 8 \\ 9 & 0 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1 \cdot 7 + 2 \cdot 9 & 1 \cdot 8 + 2 \cdot 0 \\ 3 \cdot 7 + 4 \cdot 9 & 3 \cdot 8 + 4 \cdot 0 \\ 5 \cdot 7 + 6 \cdot 9 & 5 \cdot 8 + 6 \cdot 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 25 & 8 \\ 57 & 24 \\ 89 & 40 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

[6] In der Definition ist das Summenzeichen $\sum$ eingeführt, das eine Kurzschreibweise für lange Summen ist: Man drückt mit $\sum_{i=0}^{n} a_i$ aus, daß die a_i addiert werden sollen, wobei der Index bei Null beginnt und dann alle natürlichen Zahlen bis einschließlich zur Zahl n durchläuft, z. B. $\sum_{k=3}^{5} c_k = c_3 + c_4 + c_5$.

Aufgabe 4 *Führe die drei folgenden Multiplikationen AB, CD und CDE mit*

$$\begin{aligned}
A &= \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \\
B &= \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1,5 & -0,5 \end{pmatrix} \\
C &= \begin{pmatrix} 5 & 1 & 2 \\ 0 & -2\sqrt{6} & -\sqrt{6} \\ \sqrt{5} & -\sqrt{5} & -2\sqrt{5} \end{pmatrix} \\
D &= \begin{pmatrix} 2/3 & 1/3 & 2/3 \\ 1/3 & -14/15 & 2/15 \\ 2/3 & 2/15 & -11/15 \end{pmatrix} \\
E &= \frac{1}{30}\begin{pmatrix} 5 & 0 & \sqrt{5} \\ 1 & -2\sqrt{6} & -\sqrt{5} \\ 2 & -\sqrt{6} & -2\sqrt{5} \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Von besonderer Bedeutung sind quadratische Matrizen, also solche Matrizen, die gleich viele Spalten und Zeilen besitzen. Die Matrixmultiplikation in dieser Menge ergibt wieder eine Matrix der selben Menge. Man kann dann zum Beispiel auch folgenden Ausdruck berechnen

$$[M, N] := MN - NM.$$

Der sogenannte *Kommutator* berechnet, wie groß der Unterschied ist, wenn man bei einer Multiplikation zwei Matrizen vertauscht. Mit obiger Definition einer Matrixmultiplikation ist das Produkt zweier quadratischer Matrizen assoziativ, aber *nicht* kommutativ, also ist manchmal $[M, N] \neq 0$. Dies wird in der Quantenmechanik von zentraler Bedeutung sein.

Quadratische $n \times n$-Matrizen kann man außerdem mit einem n-dimensionalen[7] Vektor multiplizieren und erhählt wieder einen n-dimensionalen Vektor. Damit definieren Matrizen eine Art von Funktion, die den Vektorraum $\mathbb{R}^n$ wieder auf sich selbst abbildet. Diese Funktionen sind linear.

Aufgabe 5 *Beweise, daß das Produkt einer quadratischen Matrix mit einem Vektor linear ist.*

Aufgabe 6 *Beweise: Alle linearen Abbildungen von $\mathbb{R}^n$ nach $\mathbb{R}^n$ sind als quadratische Matrizen darstellbar. (Diese Aufgabe ist relativ schwierig. Wenn Ihr nicht klar kommt, laßt sie einfach weg oder schaut Euch die Lösung an.)*

1.6 Zusammenfassung

- Die Elemente von Mengen können manchmal verknüpft werden zu neuen Elementen. Diese Verknüpfung kann kommutativ sein. Das ist aber nicht immer der Fall (z. B. Matrizen).
- Funktionen sind Zuordnungen zwischen Mengen, die jedem Element höchstens einen Wert zuordnen.
- Lineare Funktionen sind Funktionen, die folgende Gleichung für alle $a, b \in \mathbb{R}$ und alle x und y in der Definitionsmenge erfüllen, wobei die Definitionsmenge eine Teilmenge eines Vektorraumes ist:
$$f(ax + by) = af(x) + bf(y).$$
- Die komplexen Zahlen $\mathbb{C}$ erlauben es, auch aus negativen Zahlen die Wurzel zu ziehen; es gilt für die imaginäre Einheit $\mathrm{i}^2 = -1$.
- Die Vektorräume $\mathbb{R}^n$ verfügen über ein Skalarprodukt, das in beiden Argumenten linear ist und jedem Paar von Vektoren eine reelle Zahl zuordnet.
- Quadratische Matrizen erlauben es, lineare Abbildungen von Vektoren auf Vektoren zu beschreiben.

1.7 Lösungen zu den Aufgaben

1. Seien $a, b, x, y \in \mathbb{R}$. Dann ist
   - für $f(x) = 4x$: $f(ax + by) = 4(ax + by) = a4x + b4y = af(x) + bf(y)$. Also ist f linear.
   - für $f(x) = 4x+1$ ist $2f(3) = 2(4\cdot 3+1) = 26 \neq f(2\cdot 3) = 4\cdot 6 + 1 = 25$. Also ist f nicht linear.
   - für $f(x) = x^2$ ist $3f(2) = 3\cdot 2^2 = 12 \neq f(3\cdot 2) = 6^2 = 36$. Also ist f nicht linear.
2. Alle linearen Funktionen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ haben die Form $f(x) = ax$ mit einer Konstanten $a \in \mathbb{R}$. Daher ist der Graph immer eine Gerade durch den Ursprung.
3. $(a_1 + \mathrm{i}a_2)(b_1 + \mathrm{i}b_2) = a_1b_1 + \mathrm{i}a_2b_1 + \mathrm{i}a_1b_2 + \mathrm{i}^2a_2b_2 = (a_1b_1 - a_2b_2) + \mathrm{i}(a_2b_1 + a_1b_2)$

   und

   $(b_1 + \mathrm{i}b_2)(a_1 + \mathrm{i}a_2) = b_1a_1 + \mathrm{i}b_1a_2 + \mathrm{i}b_2a_1 + \mathrm{i}^2b_2a_2 = (b_1a_1 - b_2a_2) + \mathrm{i}(b_1a_2 + b_2a_1) = (a_1b_1 - a_2b_2) + \mathrm{i}(a_2b_1 + a_1b_2)$.
4.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1,5 & -0,5 \end{pmatrix} = \\ = \begin{pmatrix} 1(-2) + 2\cdot 1,5 & 1\cdot 1 + 2(-0,5) \\ 3(-2) + 4\cdot 1,5 & 3\cdot 1 + 4(-0,5) \end{pmatrix} = \\ = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 5 & 1 & 2 \\ 0 & -2\sqrt{6} & \sqrt{6} \\ \sqrt{5} & -\sqrt{5} & -2\sqrt{5} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2/3 & 1/3 & 2/3 \\ 1/3 & -14/15 & 2/15 \\ 2/3 & 2/15 & -11/15 \end{pmatrix} = \\ = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 2 \\ 0 & 2/\sqrt{6} & -\sqrt{6} \\ -\sqrt{5} & \sqrt{5} & 2\sqrt{5} \end{pmatrix}$$

$$\frac{1}{30}\begin{pmatrix} 5 & 1 & 2 \\ 0 & 2/\sqrt{6} & -\sqrt{6} \\ -\sqrt{5} & \sqrt{5} & 2\sqrt{5} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 & 0 & \sqrt{5} \\ 1 & -2/\sqrt{6} & -\sqrt{5} \\ 2 & \sqrt{6} & -2\sqrt{5} \end{pmatrix} = \\ = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

[7] Mit einem *n-dimensionalen* Vektor ist ein Vektor des Vektorraumes $\mathbb{R}^n$ gemeint.

5. Seien $\vec{v} = (v_i)_{i=1,...,n}$ und $\vec{w} = (w_i)_{i=1,...,n}$ zwei n-dimensionale Vektoren und $A = (a_{ik})_{i,k=1,...,n}$ eine $n \times n$-Matrix. Außerdem seien $r, z \in \mathbb{R}$. Dann gilt nach der Definition der Matrizenmultiplikation

$$\begin{aligned} A(r\vec{v} + z\vec{w}) &= \left(\sum_{i=1}^{n} a_{ji}[rv_i + zw_i] \right)_{j=1,...,n} \\ &= r \left(\sum_{i=1}^{n} a_{ji} v_i \right)_{j=1,...,n} + \\ &\qquad + z \left(\sum_{i=1}^{n} a_{ji} w_i \right)_{j=1,...,n} \\ &= rA\vec{v} + zA\vec{w} \end{aligned}$$

6. Eine sehr einfache Basis des Vektorraumes $\mathbb{R}^n$ ist die, in der der erste Vektor in der ersten Komponente den Eintrag eins hat und alle sonstigen Einträge sind gleich Null, der zweite Basisvektor hat in der zweiten Komponente den Eintrag eins und sonst Null usw. Diese Basis wird auch *kanonische* Basis genannt. Wir nennen die Basisvektoren $\vec{e}_1$,$\vec{e}_2$,...,$\vec{e}_n$. Wenn nun ein Vektor $\vec{v}$ die Einträge v_i hat, also $\vec{v} = (v_i)_{i=1,...,n}$, so kann man schreiben

$$\vec{v} = (v_i)_{i=1,...,n} = \sum_{i=1}^{n} v_i \vec{e}_i.$$

Wenn man eine Matrix $M = (m_{ij})_{i,j=1,...,n} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ mit einem solchen Basisvektor multipliziert, so gilt:

$$M\vec{e}_k = (m_{jk})_{j=1,...,n}.$$

Nun bildet man damit das Skalarprodukt mit dem Basisvektor $\vec{e}_l$

$$\vec{e}_l \bullet M\vec{e}_k = \vec{e}_l \bullet (m_{jk})_{j=1,...,n} = m_{lk}. \tag{13}$$

Nun betrachtet man die Eigenschaft der Linearität einer Abbildung $A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$

$$A(\vec{v}) = A(\sum_{i=1}^{n} v_i \vec{e}_i) = \sum_{i=1}^{n} v_i A(\vec{e}_i). \tag{14}$$

Wenn man weiß, wie eine lineare Abbildung die Basis abbildet, so ist die Abbildung für alle Vektoren definiert.

Andererseits kennt man aus Gleichung (13) die l-te Komponente des mit der Matrix M multiplizierten k-ten Basisvektors, nämlich

$$\vec{e}_l \bullet M\vec{e}_k = m_{lk}.$$

Man kann nun umgekehrt die m_{lk} so wählen, daß

$$m_{lk} = \vec{e}_l \bullet A(\vec{e}_i).$$

Dann gilt für alle $i = 1, ..., n$

$$M\vec{e}_i = A(\vec{e}_i).$$