1 Aufgaben zu Quantenmechanik

Aufgabe 1 *Der Kommutator zweier Operatoren* $\mathbf{A}$ *und* $\mathbf{B}$ *ist definiert durch*

$$[\mathbf{A};\mathbf{B}] = \mathbf{AB} - \mathbf{BA}.$$

Zeige, daß gilt

$$[\mathbf{A};\mathbf{B}] + [\mathbf{A};\mathbf{C}] = [\mathbf{A};\mathbf{B}+\mathbf{C}].$$

Aufgabe 2 *Zeige, daß gilt*

$$[\mathbf{A};\mathbf{B}] = -[\mathbf{B};\mathbf{A}].$$

Aufgabe 3 *Die Paulimatrizen sind gegeben durch*

$$\boldsymbol{\sigma}_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}; \quad \boldsymbol{\sigma}_y = \begin{pmatrix} 0 & -\mathrm{i} \\ \mathrm{i} & 0 \end{pmatrix}; \quad \boldsymbol{\sigma}_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Berechne die Kommutatoren

$$[\boldsymbol{\sigma}_x, \boldsymbol{\sigma}_y] \quad [\boldsymbol{\sigma}_x; \boldsymbol{\sigma}_z] \quad [\boldsymbol{\sigma}_y; \boldsymbol{\sigma}_z].$$

Aufgabe 4

$$\begin{aligned} |+\rangle &= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}; \quad |-\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}; \\ |x+\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}; \quad |x-\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}; \\ |y+\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ \mathrm{i} \end{pmatrix}; \quad |y-\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ -\mathrm{i} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Zeige, daß dies Eigenvektoren der jeweiligen Paulimatrizen sind.

Aufgabe 5 *Zeige, daß die Vektoren zur gleichen Richtung jeweils orthogonal stehen und die Länge eins haben.*

Aufgabe 6 *Rechne mit den Ergebnissen der letzten Aufgaben die Heisenbergsche Unschärferelation nach für die Beispiel-Vektoren* $|x+\rangle$, $|y+\rangle$ *und* $|+\rangle$.

Aufgabe 7 *Der Drehoperator um die* z*-Achse ist im Spinraum definiert durch*

$$\mathbf{D}_z(\vartheta) = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\vartheta \mathbf{S}_z/\hbar} = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\vartheta \boldsymbol{\sigma}_z/2}.$$

Sei $|\psi\rangle = \mathbf{D}_z(\vartheta)|x+\rangle$ *Berechne die Wahrscheinlichkeit, bei einer Messung der* x*-Komponente von* $|\psi\rangle$ *den Wert* $+\hbar/2$ *zu beobachten. Man kann dazu das Ergebnis der übernächsten Aufgabe verwenden.*

Aufgabe 8 *Die Exponentialfunktion ist definiert durch*

$$\mathrm{e}^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}.$$

Mit dieser Definition kann man sie auch auf Operatoren anwenden

$$\mathrm{e}^A = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\mathbf{A}^k}{k!}.$$

Beweise: Wenn $[\mathbf{A}; \mathbf{B}] = 0$*, so folgt* $[\mathrm{e}^{\mathbf{A}}; \mathbf{B}] = 0$.

Aufgabe 9 *Beweise: Wenn* $|\psi\rangle$ *ein Eigenvektor zum Operator* $\mathbf{A}$ *ist mit Eigenwert* λ*, dann ist*

$$\mathrm{e}^{\mathbf{A}}|\psi\rangle = \mathrm{e}^{\lambda}|\psi\rangle.$$

Aufgabe 10 *Spezialaufgabe: Im Ortsraum ist der Ortsoperator* $\mathbf{X} = x\mathbb{1}$*, wobei* $x \in \mathbb{R}$*. Der Impulsoperator ist definiert durch*

$$\mathbf{P} = \frac{\hbar}{\mathrm{i}} \frac{\partial}{\partial x}.$$

Kannst Du den Kommutator

$$[\mathbf{X}; \mathbf{P}]$$

berechnen? Die Vektoren im zugehörigen Hilbertraum sind Funktionen $\psi(x)$*. Schreibe einmal ausführlich den durch* $[\mathbf{X}; \mathbf{P}]$ *gegebenen Operator mit den Vektoren hin.*

Aufgabe 11 *Spezialaufgabe: Wir betrachten die Schrödingergleichung des freien Teilchens im eindimensionalen Ortsraum*

$$\mathrm{i}\hbar \frac{\partial}{\partial t}\psi(x,t) = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2}\psi(x,t).$$

Wie sehen die Lösungen aus?

Aufgabe 12 *Spezialaufgabe: Die Lösungsfunktionen der Schrödingergleichung sind die Zustandsvektoren des Systems in der Ortsbasis*

$$\langle x|\psi\rangle = \psi(x).$$

Das Skalarprodukt zweier solcher Zustandsvektoren ist definiert durch

$$\langle\psi_1|\psi_2\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \langle\psi_1|x\rangle\langle x|\psi_2\rangle \mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{\infty} \psi_1^*(x)\psi_2(x)\mathrm{d}x.$$

Kann man die Lösungen aus der letzten Aufgabe normalisieren? Woran könnte das liegen? Denke an die Bedeutung der Wellenfunktion.

Aufgabe 13 *Spezialaufgabe: In der Schrödingergleichung*

$$\mathrm{i}\hbar\frac{\partial}{\partial t}|\psi(t)\rangle = \mathbf{H}|\psi(t)\rangle$$

kann man die Vektoren $|\psi(t)\rangle$ in der Basis der Eigenvektoren des Hamilton-operators $\mathbf{H}$ aufschreiben.

$$\mathbf{H}|e_i\rangle = E_i|e_i\rangle$$

Zeige, daß die Schrödingergleichung dann in einen zeitabhängigen und einen zeitunabhängigen Teil zerfällt.

Aufgabe 14 *Spezialaufgabe: Wir betrachten die zeitunabhängige Schrödingergleichung des Teilchens im Potential $V(x)$*

$$E\psi(x) = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\psi(x) + V(x)\psi(x).$$

mit

$$V(x) = \begin{cases} 0 & 0 \leq x \leq a \\ \infty & \text{sonst} \end{cases} .$$

Dies bedeutet, das Teilchen darf sich nur zwischen $x = 0$ und $x = a$ aufhalten. Die Lösungen dieser Differentialgleichung müssen die Bedingungen erfüllen

$$\psi(0) = \psi(a) = 0.$$

Wie sehen die Lösungen aus?