1 Aufgaben zu Quantenmechanik: Lösungen

Lösung zu Aufgabe 1

$$\begin{aligned}[\mathbf{A};\mathbf{B}] + [\mathbf{A};\mathbf{C}] &= \mathbf{AB} - \mathbf{BA} + \mathbf{AC} - \mathbf{CA} \\ &= \mathbf{AB} + \mathbf{AC} - [\mathbf{BA} + \mathbf{CA}] \\ &= \mathbf{A}(\mathbf{B} + \mathbf{C}) - [\mathbf{B} + \mathbf{C}]\mathbf{A} \\ &= [\mathbf{A}; \mathbf{B} + \mathbf{C}]\end{aligned}$$

Lösung zu Aufgabe 2

$$[\mathbf{A};\mathbf{B}] = \mathbf{AB} - \mathbf{BA} = -(\mathbf{AB} - \mathbf{AB}) = -[\mathbf{B};\mathbf{A}].$$

Lösung zu Aufgabe 3

$$\begin{aligned}[\boldsymbol{\sigma}_x;\boldsymbol{\sigma}_y] &= \begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & -\mathrm{i}\\ \mathrm{i} & 0\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}0 & -\mathrm{i}\\ \mathrm{i} & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix}\mathrm{i} & 0\\ 0 & -\mathrm{i}\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}-\mathrm{i} & 0\\ 0 & \mathrm{i}\end{pmatrix} \\ &= 2\mathrm{i}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix} \\ &= 2\mathrm{i}\boldsymbol{\sigma}_z\end{aligned}$$

Für die Multiplikation gilt im allgemeinen

$$[\boldsymbol{\sigma}_x;\boldsymbol{\sigma}_y] = 2\mathrm{i}\boldsymbol{\sigma}_z \qquad [\boldsymbol{\sigma}_z;\boldsymbol{\sigma}_x] = 2\mathrm{i}\boldsymbol{\sigma}_y \qquad [\boldsymbol{\sigma}_y;\boldsymbol{\sigma}_z] = 2\mathrm{i}\boldsymbol{\sigma}_x. \tag{1}$$

Lösung zu Aufgabe 4

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\sigma}_x|x+\rangle &= \begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\ 1\end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\ 1\end{pmatrix} \\ \boldsymbol{\sigma}_x|x-\rangle &= \begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\ -1\end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}-1\\ 1\end{pmatrix} = -\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\ -1\end{pmatrix} \\ \boldsymbol{\sigma}_y|y+\rangle &= \begin{pmatrix}0 & -\mathrm{i}\\ \mathrm{i} & 0\end{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\ \mathrm{i}\end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\ \mathrm{i}\end{pmatrix} \\ \boldsymbol{\sigma}_y|y-\rangle &= \begin{pmatrix}0 & -\mathrm{i}\\ \mathrm{i} & 0\end{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\ -\mathrm{i}\end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}-1\\ \mathrm{i}\end{pmatrix} = -\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\ -\mathrm{i}\end{pmatrix}\end{aligned}$$

Für die z-Richtung sollte es jetzt auch klar sein.

Lösung zu Aufgabe 5

$$\begin{aligned}
\langle x+|x-\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}(1 \quad 1)\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1 & -1\end{pmatrix} = \frac{1}{2}(1-1) = 0\\
\langle y+|y-\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}(1 \quad -\mathrm{i})\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1 & -\mathrm{i}\end{pmatrix} = \frac{1}{2}(1-1) = 0\\
\langle x+|x+\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}(1 \quad 1)\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1 & 1\end{pmatrix} = \frac{1}{2}(1+1) = 1\\
\langle x-|x-\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}(1 \quad -1)\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1 & -1\end{pmatrix} = \frac{1}{2}(1+1) = 1\\
\langle y+|y+\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}(1 \quad -\mathrm{i})\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1 & \mathrm{i}\end{pmatrix} = \frac{1}{2}(1+1) = 1\\
\langle y-|y-\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}(1 \quad \mathrm{i})\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1 & -\mathrm{i}\end{pmatrix} = \frac{1}{2}(1+1) = 1
\end{aligned}$$

z-Richtung geht genauso.

Lösung zu Aufgabe 6 *Sei* $\mathbf{A} = \mathbf{S}_x = \frac{\hbar}{2}\boldsymbol{\sigma}_x$ *und* $\mathbf{B} = \mathbf{S}_y = \frac{\hbar}{2}\boldsymbol{\sigma}_y$. *Die Heisenbergsche Unschärferelation ist*

$$\frac{1}{4}|\langle[\mathbf{A};\mathbf{B}]\rangle|^2 \leq \langle\Delta_A^2\rangle\langle\Delta_B^2\rangle.$$

Aus (1) folgt damit

$$\frac{1}{4}|\mathrm{i}\frac{\hbar^2}{2}\langle\boldsymbol{\sigma}_z\rangle|^2 \leq \langle\Delta_{S_x}^2\rangle\langle\Delta_{S_y}^2\rangle.$$

Nun ist im Zustand $|+\rangle$

$$\begin{aligned}
\langle\boldsymbol{\sigma}_z\rangle &= \langle+|\boldsymbol{\sigma}_z|+\rangle = \langle+|1|+\rangle = 1\\
\langle\boldsymbol{\sigma}_y\rangle &= \langle+|\boldsymbol{\sigma}_y|+\rangle = \langle+|\mathrm{i}|-\rangle = 0\\
\langle\boldsymbol{\sigma}_x\rangle &= \langle+|\boldsymbol{\sigma}_x|+\rangle = \langle+|-\rangle = 0.
\end{aligned}$$

Dann ergibt sich

$$\begin{aligned}
\langle\Delta_{\mathbf{S}_x}^2\rangle &= \frac{\hbar^2}{4}\langle+|\boldsymbol{\sigma}_x^2|+\rangle = \frac{\hbar^2}{4}\langle+|\mathbb{1}|+\rangle = \frac{\hbar^2}{4}\\
\langle\Delta_{\mathbf{S}_y}^2\rangle &= \frac{\hbar^2}{4}\langle+|\boldsymbol{\sigma}_y^2|+\rangle = \frac{\hbar^2}{4}\langle+|\mathbb{1}|+\rangle = \frac{\hbar^2}{4}
\end{aligned}$$

Damit ist die rechte Seite der Unschärferelation

$$\frac{1}{4}|\mathrm{i}\frac{\hbar^2}{2}\langle\boldsymbol{\sigma}_z\rangle|^2 = \frac{1}{4}|\mathrm{i}\frac{\hbar^2}{2}|^2 = \frac{\hbar^4}{16}$$

und die linke Seite ist

$$\langle \Delta^2_{S_x} \rangle \langle \Delta^2_{S_y} \rangle = \frac{\hbar^2}{4}\frac{\hbar^2}{4} = \frac{\hbar^4}{16}.$$

Die Unschärferelation ist – wie zu erwarten war – in diesem Spezialfall erfüllt.

Lösung zu Aufgabe 7 *Der Drehoperator um die z-Achse ist im Spinraum definiert durch*

$$\mathbf{D}_z(\vartheta) = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\vartheta \mathbf{S}_z/\hbar} = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\vartheta \boldsymbol{\sigma}_z/2}.$$

Sei

$$|\psi\rangle = \mathbf{D}_z(\vartheta)|x+\rangle = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\vartheta\boldsymbol{\sigma}_z/2}\frac{1}{\sqrt{2}}(|+\rangle + |-\rangle) = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\vartheta/2}|+\rangle + \mathrm{e}^{\mathrm{i}\vartheta/2}|-\rangle\right).$$

Die Wahrscheinlichkeit, den Wert $+\hbar/2$ zu beobachten, wenn man in x-Richtung den Spin mißt, ist gegeben durch die Bornsche Regel

$$\begin{aligned}
|\langle x + |\psi\rangle|^2 &= |\frac{1}{\sqrt{2}}(\langle +| + \langle -|)\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\vartheta/2}|+\rangle + \mathrm{e}^{\mathrm{i}\vartheta/2}|-\rangle\right)|^2 \\
&= |\frac{1}{2}(\langle +| + \langle -|)\left(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\vartheta/2}|+\rangle + \mathrm{e}^{\mathrm{i}\vartheta/2}|-\rangle\right)|^2 \\
&= \frac{1}{4}|\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\vartheta/2} + \mathrm{e}^{\mathrm{i}\vartheta/2}|^2 \\
&= \frac{1}{4}|\cos(-\vartheta/2) + \mathrm{i}\sin(-\vartheta/2) + \cos(\vartheta/2) + \sin(\vartheta/2)|^2 \\
&= \frac{1}{4}|\cos(\vartheta/2) - \mathrm{i}\sin(\vartheta/2) + \cos(\vartheta/2) + \sin(\vartheta/2)|^2 \\
&= \frac{1}{4}|2\cos(\vartheta/2)|^2 \\
&= \cos^2(\vartheta/2)
\end{aligned}$$

Lösung zu Aufgabe 8

$$\mathrm{e}^{\mathbf{A}}\mathbf{B} = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{\mathbf{A}^k}{k!}\mathbf{B} = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}\mathbf{A}^k\mathbf{B}.$$

Da $[\mathbf{A};\mathbf{B}] = 0$ gilt auch $[\mathbf{A}^k;\mathbf{B}] = 0$ (man tauscht einfach immer wieder Paare von $\mathbf{A}$ und $\mathbf{B}$) und damit

$$\mathrm{e}^{\mathbf{A}}\mathbf{B} = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}\mathbf{B}\mathbf{A}^k = \mathbf{B}\mathrm{e}^{\mathbf{A}}.$$

Lösung zu Aufgabe 9 *Wenn $|\psi\rangle$ ein Eigenvektor zum Operator $\mathbf{A}$ ist mit Eigenwert λ, dann ist*

$$\mathrm{e}^{\mathbf{A}}|\psi\rangle = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\mathbf{A}^k}{k!}|\psi\rangle = |\psi\rangle + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\mathbf{A}^(k-1)}{k!}\lambda|\psi\rangle = |\psi\rangle + \lambda|\psi\rangle + \ldots + \sum_{k=l}^{\infty} \frac{\mathbf{A}^(k-l)}{k!}\lambda^l|\psi\rangle = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!}|\psi\rangle =$$

Lösung zu Aufgabe 10 *Für alle Vektoren $\psi(x)$ im Hilbertraum gilt:*

$$[\mathbf{X};\mathbf{P}]\psi(x) = x\frac{\hbar}{\mathrm{i}}\frac{\partial}{\partial x}\psi(x) - \frac{\hbar}{\mathrm{i}}\frac{\partial}{\partial x}(x\psi(x)).$$

Mit der Produktregel für den zweiten Summand

$$\begin{aligned}
[\mathbf{X};\mathbf{P}]\psi(x) &= x\frac{\hbar}{\mathrm{i}}\frac{\partial}{\partial x}\psi(x) - \frac{\hbar}{\mathrm{i}}x\frac{\partial}{\partial x}\psi(x)) - \frac{\hbar}{\mathrm{i}}\psi(x)\frac{\partial}{\partial x}x \\
&= -\frac{\hbar}{\mathrm{i}}\psi(x)\frac{\partial}{\partial x}x \\
&= -\frac{\hbar}{\mathrm{i}}\psi(x).
\end{aligned}$$

In Operatorschreibweise gilt also

$$[\mathbf{X};\mathbf{P}] = -\frac{\hbar}{\mathrm{i}}\mathbb{1}$$

Lösung zu Aufgabe 11 *Mögliche Lösungen haben die Form*

$$\psi_E(x,t) = A\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}\sin(\sqrt{2mE}x/\hbar + \phi).$$

wobei

$$\omega\hbar = E$$

gelten muß.

Der Phasenwinkel ϕ und die Amplitude A hängen von den Randbedingungen ab. Lösungen zu verschiedenen A und ϕ ergeben zusammen wieder eine Lösung – jedoch evtl. zu verschiedenen Randbedingungen.

Lösung zu Aufgabe 12 *Spezialaufgabe: Wenn man die Lösungen normalisieren möchte, berechnet man zuerst die Norm*

$$\begin{aligned}
\|\psi_E\|^2 &= \int_{-\infty}^{\infty} A * \mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}\sin(\sqrt{2mE}x/\hbar + \phi)A\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}\sin(\sqrt{2mE}x/\hbar + \phi)\mathrm{d}x \\
&= |A|^2 \int_{-\infty}^{\infty} \sin^2(\sqrt{2mE}x/\hbar + \phi)\mathrm{d}x.
\end{aligned}$$

Da diese Funktion immer positiv ist und sich zudem periodisch wiederholt, kann das unendliche Integral keinen endlichen Wert ergeben.

Nach der Bornschen Regel sind die quadrierten Wellenfunktionen ein Wahrscheinlichkeitsverteilung. Weil wir die Schrödingergleichung des freien *Teilchens betrachtet haben, sind die angegebenen Lösungen nicht lokalisiert, entsprechen also einer minimalen Kenntnis des Ortes – das Teilchen zu ψ_E ist im ganzen Universum gleichzeitig. Deswegen kann man die Wahrscheinlichkeit nicht normieren, weil die Wahrscheinlichkeit, das Teilchen an einem speziellen Ort zu treffen mathematisch gleich Null ist, wenn das Universum ein unendliches Volumen besitzt.*

Lösung zu Aufgabe 13 *Spezialaufgabe: Wenn*

$$\mathbf{H}|e_i\rangle = E_i|e_i\rangle,$$

dann ist

$$\mathrm{i}\hbar\frac{\partial}{\partial t}|e_i\rangle = E_i|e_i\rangle.$$

Das bedeutet

$$|e_i, t\rangle = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}E_i t/\hbar}|e_i, t=0\rangle.$$

Dann aber ist die Schrödingergleichung

$$E_i\mathrm{e}^{-\mathrm{i}E_i t/\hbar}|e_i, t=0\rangle = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}\mathbf{H}|e_i, t=0\rangle.$$

Es gibt also eine zeitunabhängige Schrödingergleichung

$$E_i|e_i, t=0\rangle = \mathbf{H}|e_i, t=0\rangle.$$

Lösung zu Aufgabe 14 *Die allgemeine Lösung haben wir bereits oben bestimmt (hier ist das ganze zeitunabhängig).*

$$\psi_E(x) = A\sin(\sqrt{2mE}x/\hbar + \phi).$$

Nun müssen wir ϕ und E so wählen, daß wir die Randbedingung

$$\psi_E(x=0) = \psi_E(x=a) = 0$$

stimmen. Dies ist der Fall wenn erstens $\phi = 0$ und zweitens

$$E = \frac{\pi^2\hbar^2 n^2}{2ma^2} \qquad n \in \mathbb{N}.$$

Diese Einschränkung der Energiewerte nennt man eine Quantisierung*: Wegen des Potentials in dem sich das Teilchen befindet, kann es nur ausgewählte Energiewerte annehmen. Sonstige Energiewerte sind verboten.*

Hier können wir auch normieren, da wir nur ein endliches Volumen haben, in dem sich das Teilchen aufhalten kann. Es ist

$$
\begin{aligned}
\|\psi_E\|^2 = \int_{-\infty}^{\infty} |\psi_E(x)|^2 \mathrm{d}x \\
&= |A|^2 \int_0^a \sin^2(\pi n x/a) \mathrm{d}x \\
&= |A|^2 \left. \frac{x}{2} \right|_0^a \\
&= |A|^2 \frac{a}{2}.
\end{aligned}
$$

Also muß $A = \sqrt{2/a}$ *sein.*